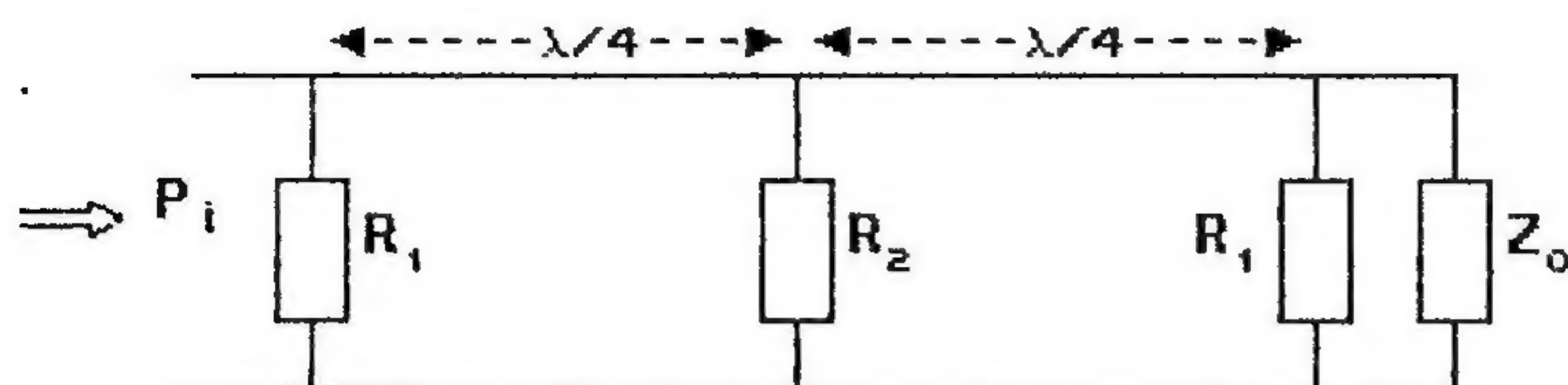


1º.-El siguiente circuito ,que corresponde a un conector atenuador de microondas, cuenta con una impedancia característica de  $50\Omega$  y se halla adaptado tanto a la entrada como a la salida. Se le inyecta una potencia incidente de 0,9wattios de la cual un tercio se disipa en  $R_1$  . Calcular:



- $R_1$  y  $R_2$ . Justificar
- Potencia disipada en  $R_1$  y  $R_2$ . Justificar
- Potencia Transmitida a  $Z_0$ . Justificar

2º. En una línea de transmisión aparecen simultáneamente 4,5 ciclos de una señal de 2,5 Megahertz. ¿Cual es la longitud de la línea?

3º. Una línea bifilar abierta tiene una impedancia característica de  $600\Omega$  y alimenta una carga  $Z_R$  real menor que  $Z_0$ . El ROE medido es de 1,5. Encontrar la impedancia de carga.

1er Parcial: MEDIOS DE ENLACE

Una señal electromagnética que opera en la frecuencia de 3 Megahertz, se propaga en el espacio libre con un campo eléctrico incidente cuya amplitud es de 3 microvolt por metro.

Dicha señal se introduce en un medio de propagación cuya constante dieléctrica tiene valor igual a tres.

Se Pide;

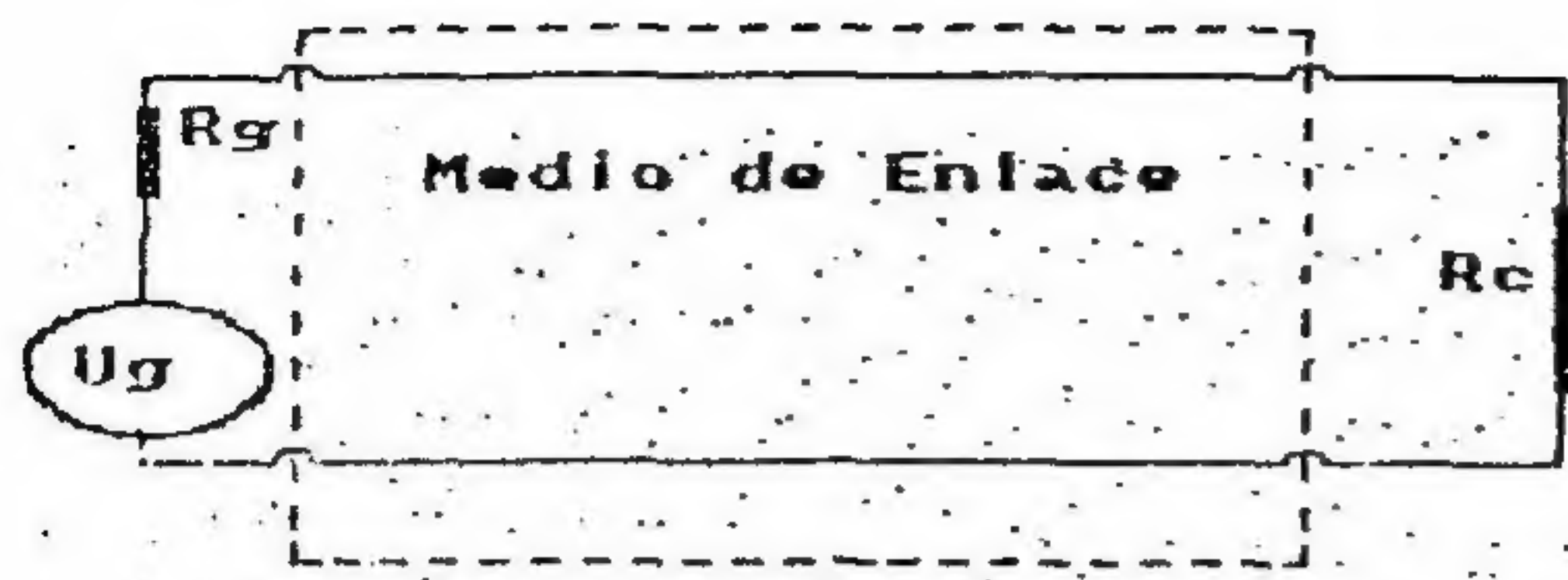
- Longitud de onda en el espacio libre
- Longitud de onda en el medio de propagación
- Constante de Fase en el espacio libre
- Constante de Fase en el medio de propagación
- Velocidad de Propagación en el espacio libre
- Velocidad de Propagación en el medio de propagación
- El Campo Eléctrico en el medio de propagación
- El Campo Magnético en el espacio libre
- El Campo Magnético en el medio de propagación
- Impedancia Intrínseca en el espacio libre
- Impedancia Intrínseca en el medio de propagación
- El Campo Eléctrico Reflejado
- El Campo Magnético Reflejado



# **MEDIOS DE ENLACE**

**Se ha hecho el deposito que marca la  
ley 11723  
ISBN 978-987-05-5845-3**





En otros términos, tratase de un emisor que transmite una señal electromagnética que se propaga a través del medio de enlace y converge en un receptor cuyo equivalente se sintetiza con la mencionada resistencia de carga.

Para ello se recurre al análisis que surge de someter el circuito a las distintas posiciones o condiciones de contorno eléctrico.

Tales condiciones de contorno las encontramos desconectando la carga del circuito, analizando los parámetros intervinientes, lo que nos obliga a introducirnos en el estudio de los campos electrostáticos y por ende, desarrollar con detenimiento la ley de Coulomb, (Año 1784), la generalización de sus datos experimentales mediante el teorema de Gauss, (Año 1810), y las ecuaciones correspondientes de Maxwell, (Año 1861), diferencial e integral.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

Dicho paso nos permitirá conocer los parámetros primarios que componen el medio de enlace tales como la resistencia, capacidad, inductancia y conductancia por unidad de longitud, como también, los parámetros secundarios denominados, constante de propagación y sus partes, constante de atenuación, constante de fase y tras ellos la velocidad de propagación, entre otros.

El cierre del circuito que nos sirve de modelo y por lo tanto la circulación de la corriente eléctrica en los conductores nos lleva al estudio del campo electromagnético y en consecuencia a la ley de Ampere. (Año 1819) y su generalización mediante la respectiva ecuación de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Luego y en el mismo orden cronológico que se sucedieron los fenómenos, se estudia la teoría de la inducción electromagnética como la experimentaron Miguel Faraday, (1831), y luego su integración en la teoría electromagnética de Maxwell.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Al estudio, desarrollo y aplicación de las cuatro ecuaciones de Maxwell, le siguen la teoría de los potenciales retardados introducida por primera vez por el



danés Luis Lorentz en 1867, lo que nos permite encausar el tema hacia las ecuaciones diferenciales generales de Kirchhoff que envuelve la generalidad de la propagación de las ondas electromagnéticas.

Estas últimas, permitirán visualizar las diferentes condiciones de contorno de un circuito electromagnético, es decir dispuestas las mismas:

$$1) \vec{\nabla}^2 \psi - \mu_0 \cdot \mu \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \frac{d^2 \psi}{dt^2} = - \frac{\rho_r}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

En donde  $\rho_r$  es la densidad volumétrica de carga,  $\epsilon$  es la constante dieléctrica del medio,  $\psi$  es el potencial escalar.

Cuando el potencial no se encuentra sometido a dependencia temporal la ecuación precedente se convierte en la ecuación de Positón, mientras que por el contrario, cuando depende del tiempo y a su vez no existen cargas en el medio nos encontramos con la ecuación de las ondas, más conocida como la ecuación de D'alambert. O también ecuación de las cuerdas vibrantes.

En las siguientes unidades en el marco de la propagación guiada se expondrán las teorías correspondientes a las líneas de transmisión, cables coaxiales, guías de onda, fibra óptica e introducción a las antenas.

Los tópicos señalados se complementan con una gran variedad de ejercicios de aplicación tanto resueltos como propuestos con los respectivos resultados.



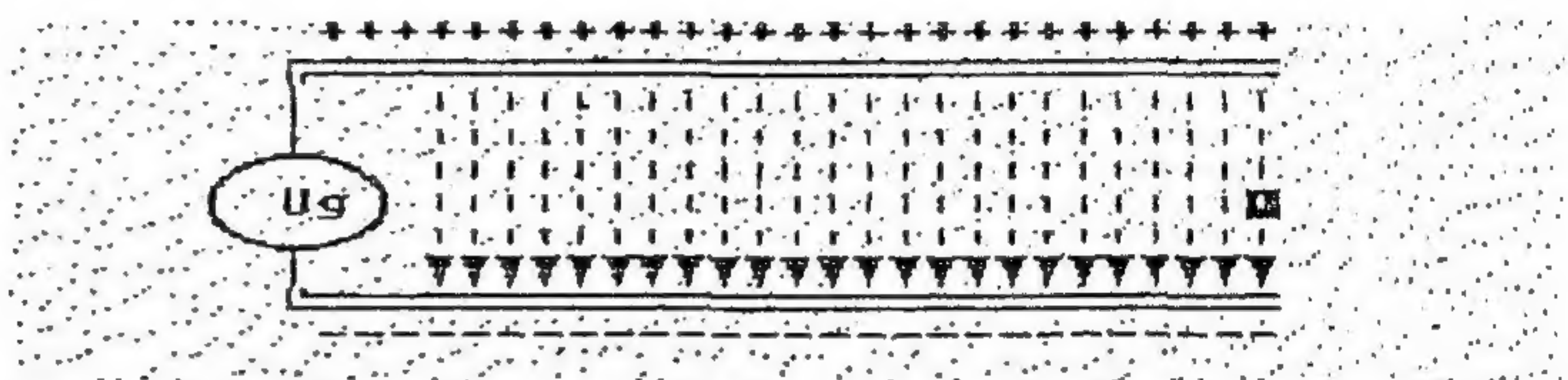
## 0002.-LA TEORIA ELECTROMAGNETICA

*Circunscribimos nuestro enfoque teórico-práctico del tema en un medio de enlace físico elemental.*

*Nos referimos a una fuente de Thevenin que alimenta mediante un par físico una resistencia de carga.*

## 0003.-EL CAMPO ELECTRICO

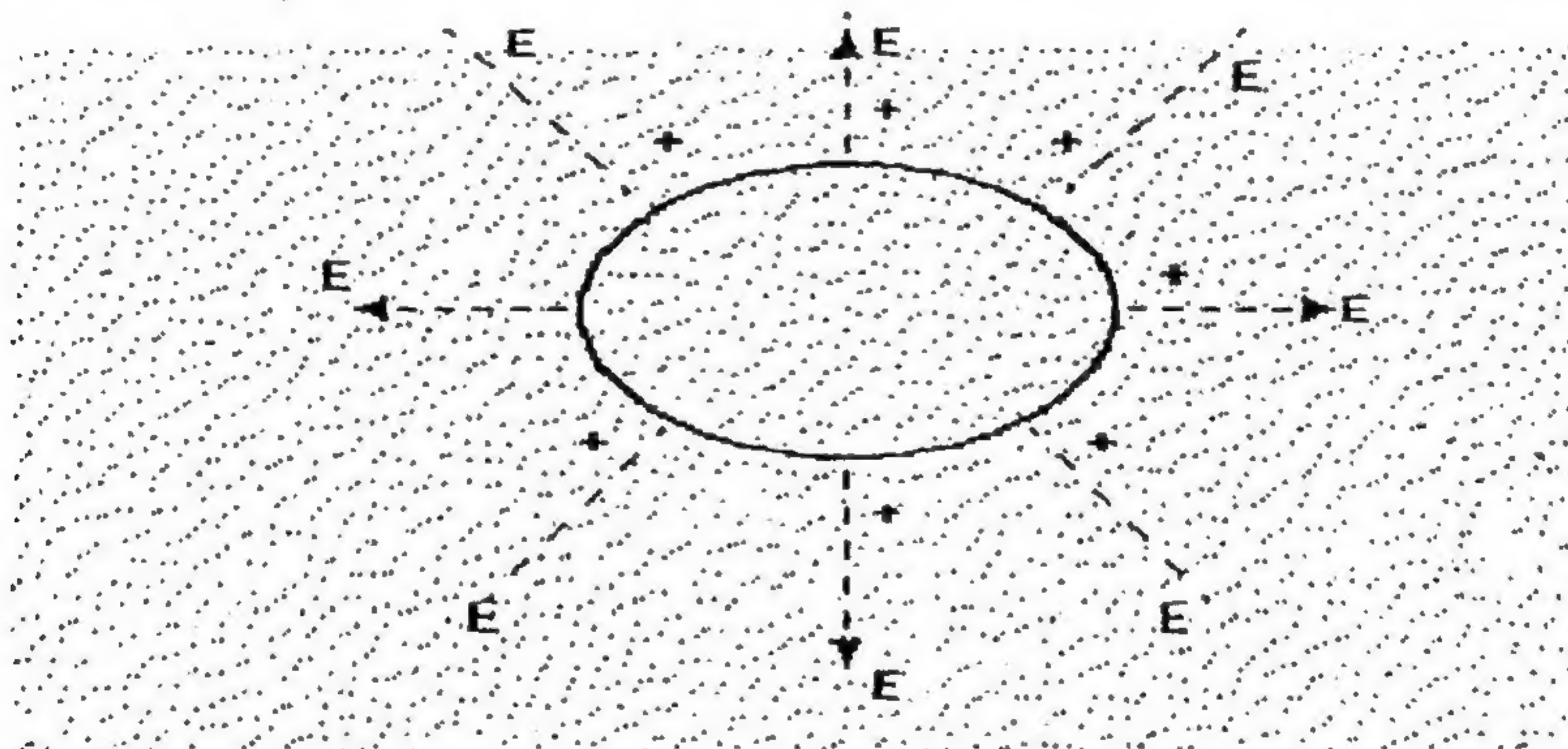
Procedemos a extraer la carga tal como se establece en la sección 0001, manteniendo la diferencia de potencial aplicada en la entrada.



Los conductores se hallan así ambos polarizados. Cuentan con partículas eléctricas del mismo signo.

Si al sistema en tales condiciones se le aplican dos leyes fundamentales; la ley de Coulomb y la ley de Dufay, (Año 1600), es decir la ley de los signos:

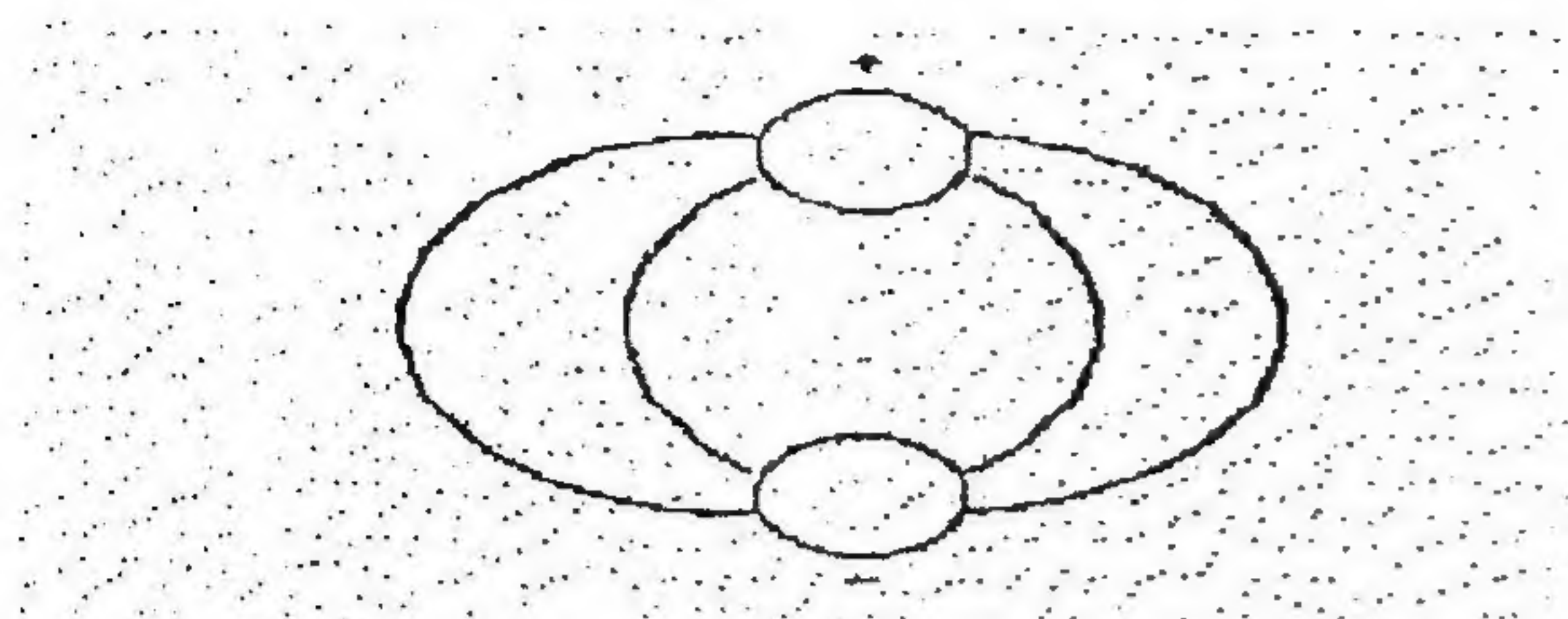
$$1) \quad \vec{F} = k \frac{Q_1 * Q_2}{r^2} * \vec{r}^o$$



Se tiene alrededor del conductor un flujo eléctrico, producto de la gran repulsión que obliga a las partículas a ubicarse en la periferia.



Las líneas representativas de esa manifestación de fuerza son emergentes de la superficie de uno de los conductores y convergen de igual modo en el otro conductor.



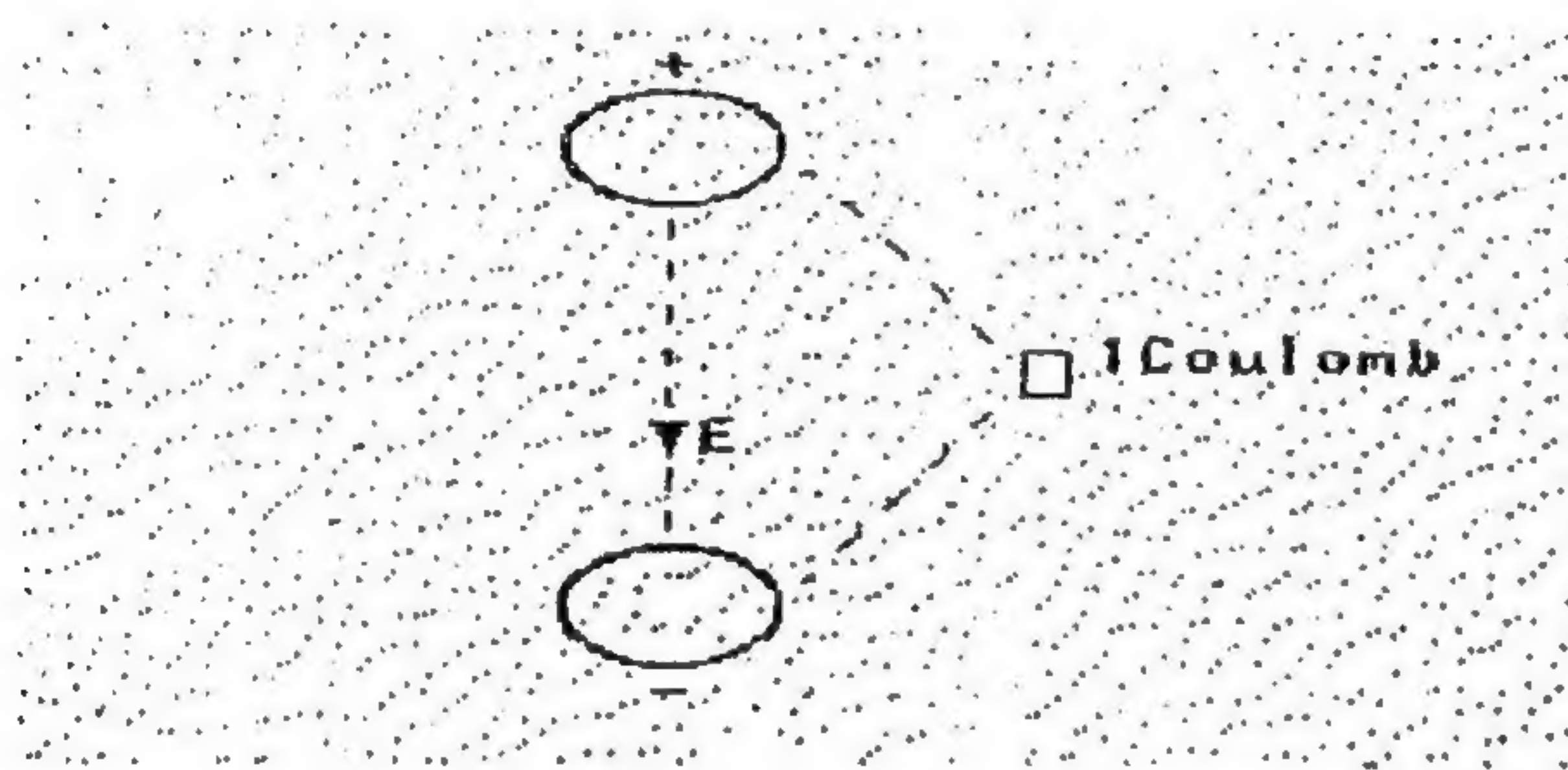
El campo eléctrico debido a las cargas estáticas se mide en el espacio alrededor y dentro de la zona de influencia. Cada línea de fuerza representa la densidad superficial del flujo eléctrico.

$$2) \vec{E} = \frac{\phi_e}{\Sigma_{\phi}}$$

$$D = \frac{\phi_e}{\Sigma}$$

Se define asimismo como la fuerza que en dicho espacio se ejerce sobre una carga unitaria colocada hipotéticamente a ese efecto.

$$3) \vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} (\text{New} / \text{Coul})$$



Falla hoja 6

está entre 108 y 109

$$\phi_e = \oint_{\Sigma} D \cdot d\Sigma$$

$D$  = densidad superficial de flujo.

$$D = \epsilon \epsilon_0 E$$

$$\phi_e = Q = \oint_{\Sigma} \epsilon \epsilon_0 E \cdot d\Sigma$$

Campo es más

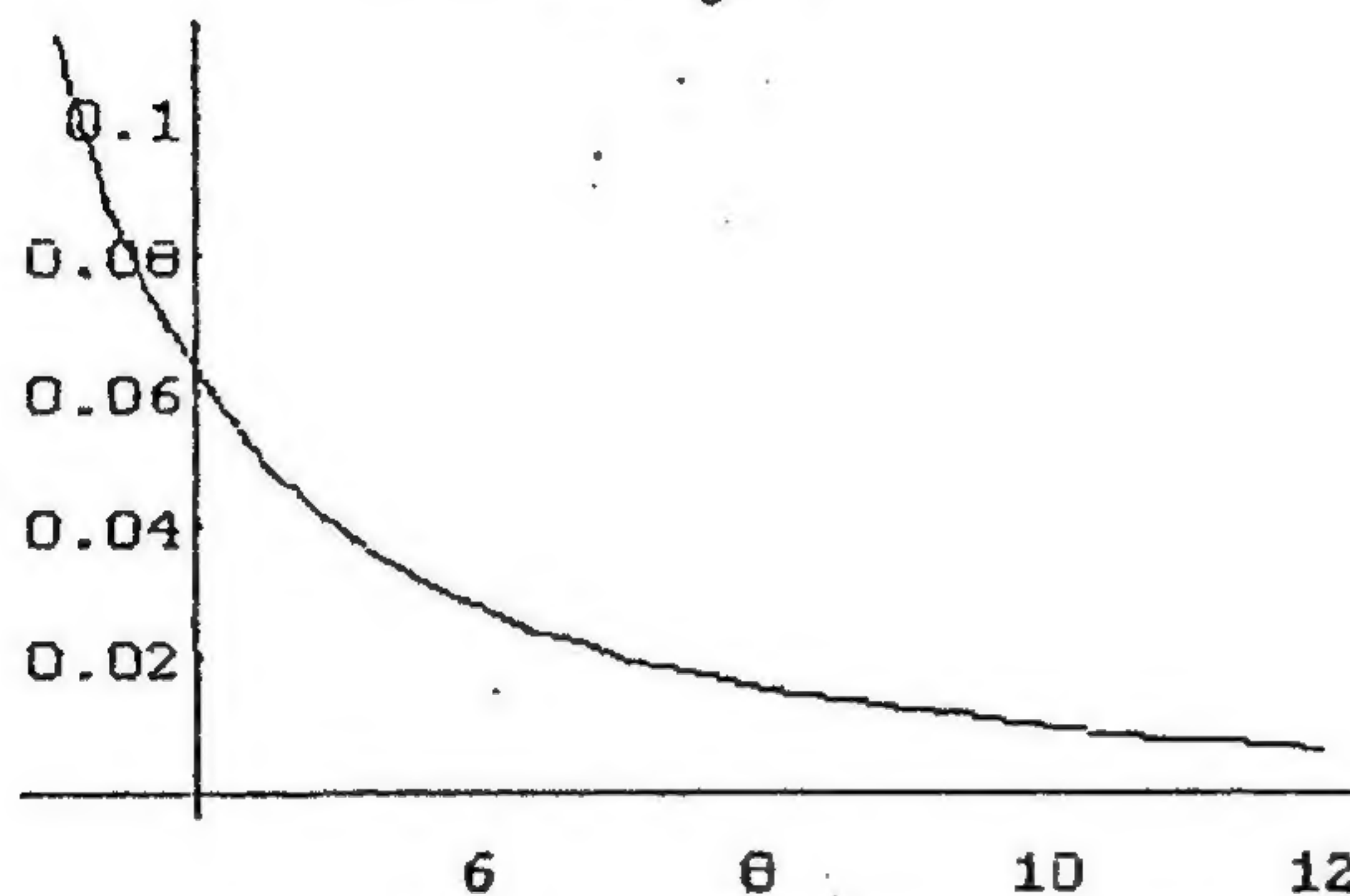


$$7) \Sigma = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

De esta manera la Ec. 6) se expresa:

$$8) Q = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$9) E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

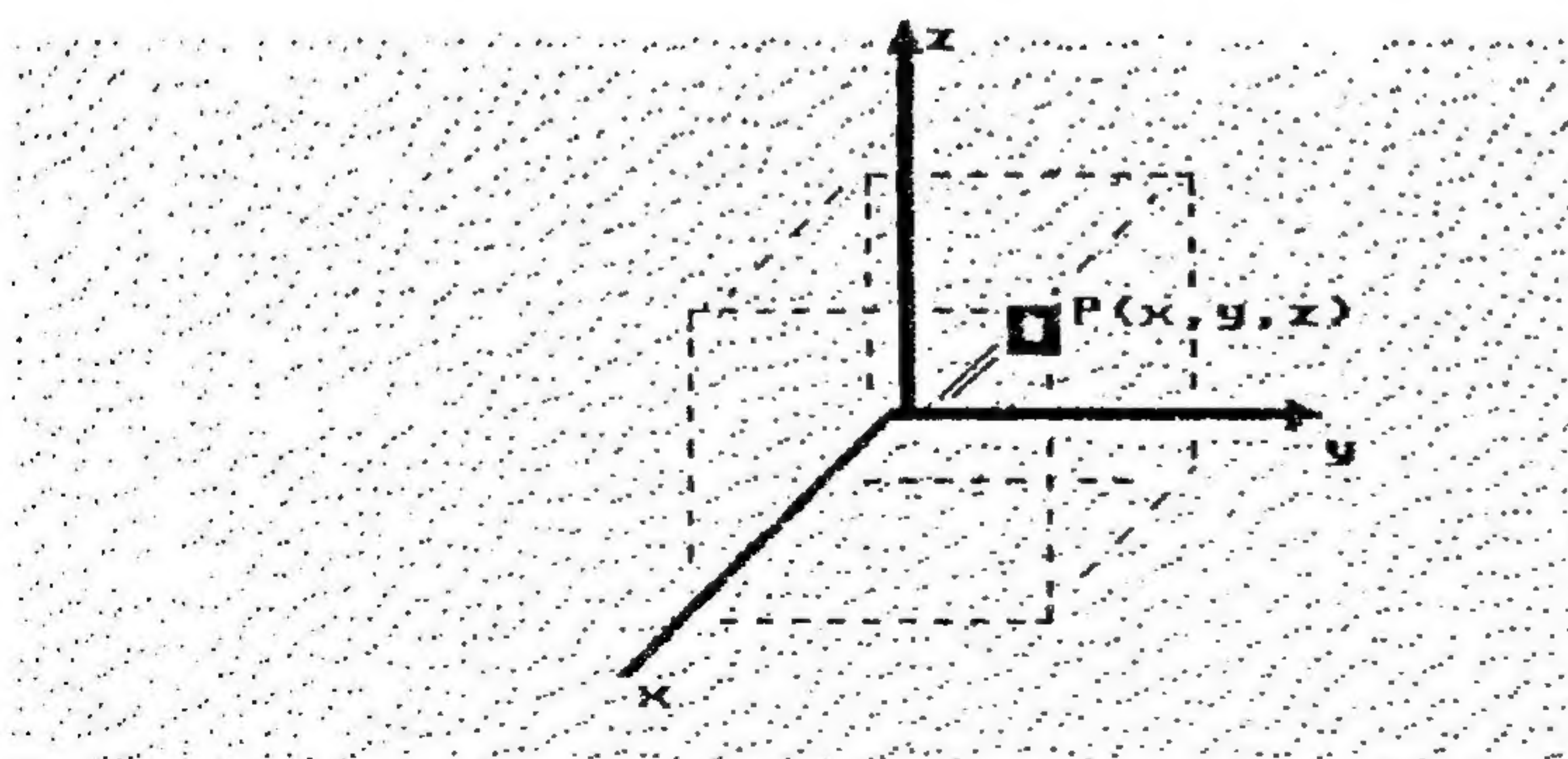


La ecuación 9), nos suministra el valor absoluto del campo eléctrico el que varía en función de la distancia radial. Al tratarse de un vector, su expresión en coordenadas rectilíneas es:

$$10) \vec{E} = \vec{i} \cdot k \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot x + \vec{j} \cdot k \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot y + \vec{k} \cdot k \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot z$$

donde:

$$11) k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} = 9 \times 10^9$$



La ecuación de Maxwell-Gauss, se constituye en la primera de las herramientas de solución en la teoría electrostática. La misma, se desarrolla en la siguiente Sección.

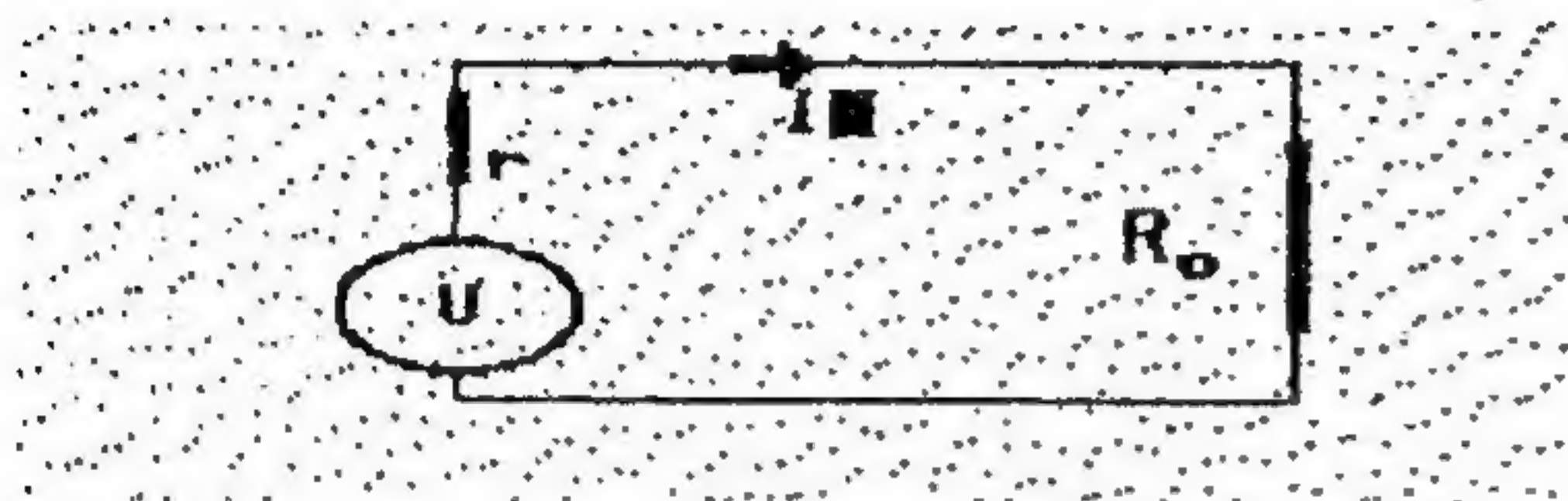


0005. EL CIRCUITO ABIERTO

*Todo Medio de Enlace constituye un Sistema que se caracteriza por contar con dos bornes de entrada y dos bornes de salida.*

*En tales condiciones, la fuerza electromotriz provista por el generador provoca la circulación de una corriente eléctrica, la cual está dada por la ley de Ohm según:*

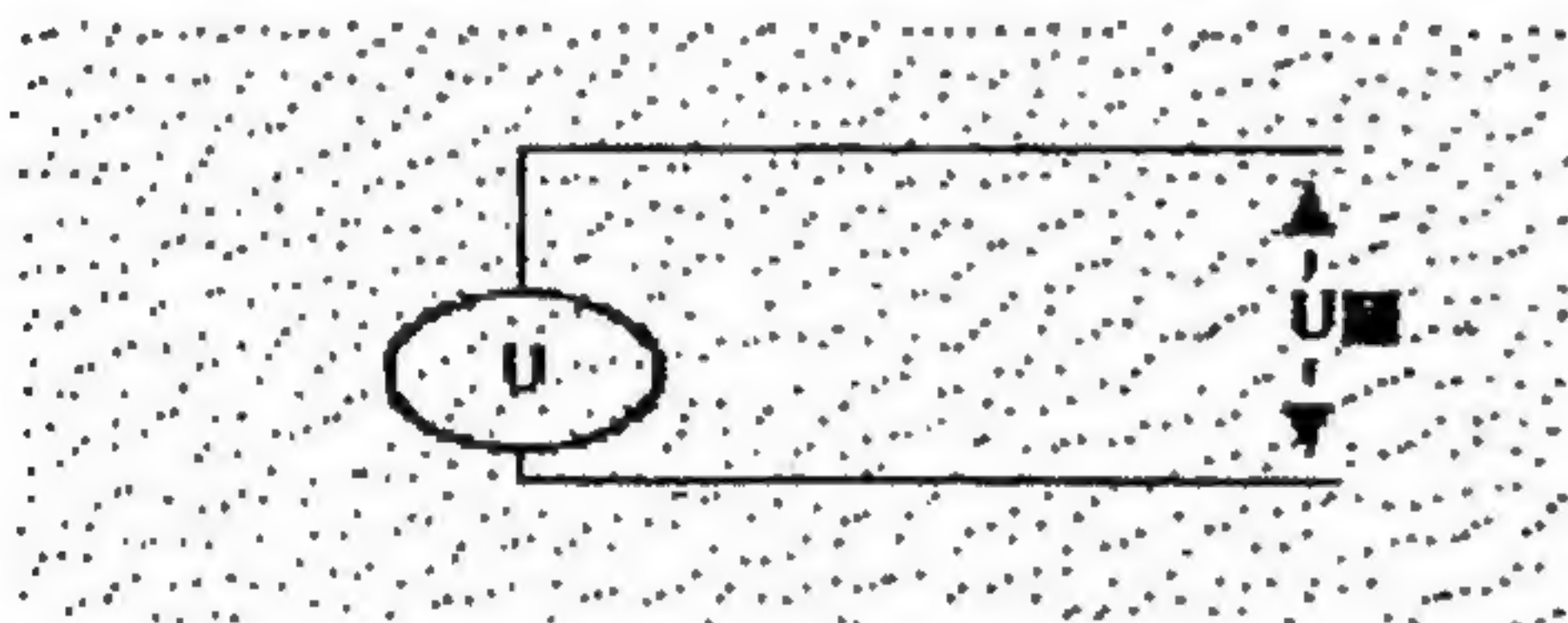
$$I = U / R$$



*donde U representa la fuerza electro motriz dada por el generador. R representa la resistencia total del sistema:*

$$(R = r + R_c)$$

*Para analizar los fenómenos electrostáticos del sistema es necesario interrumpir la circulación de la corriente.*



*Entre los conductores existe una diferencia de potencial constante todo a lo largo de la línea.*

*Dicho valor constante es el mismo que provee el generador es decir, U.*

*Los conductores ahora presentan una polarización es decir cada uno de los mismos cuentan con partículas eléctricas del mismo signo.*

*Se cumple tanto la ley de Coulomb como la ley de los signos.*

$$1) \quad F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$$+ \times + = +$$

$$- \times - = +$$

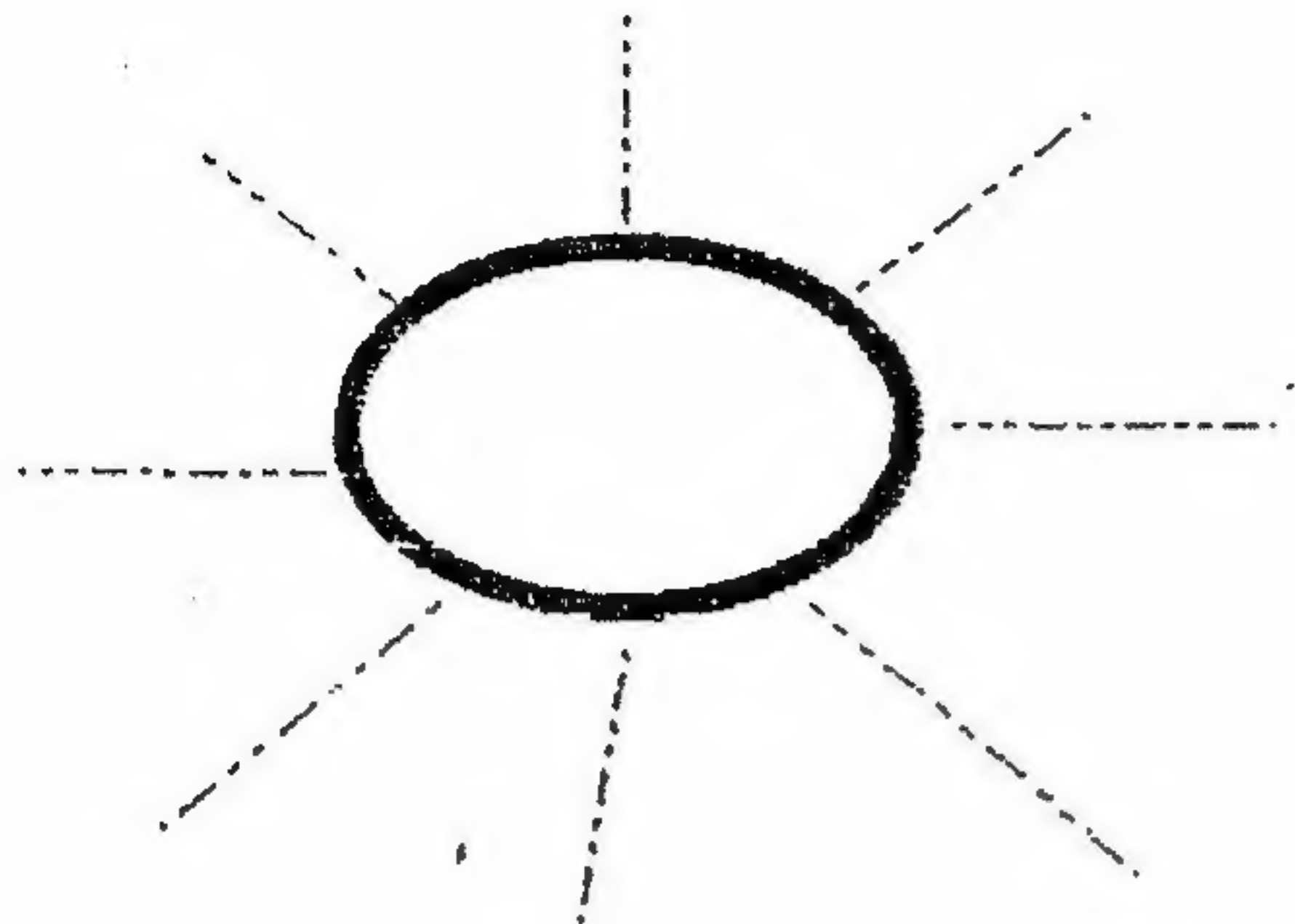
*Si la separación es ínfima la fuerza de repulsión es infinita.-*



Por ello se produce internamente en los conductores una fuerte repulsión.

Como consecuencia de ello se genera una manifestación de fuerzas normal a la superficie exterior.

Dicha manifestación de fuerzas constituye el Campo Eléctrico.



Gauss en 1810 generaliza los datos experimentales de Coulomb y enuncia su conocido teorema.

El demuestra que el flujo total emergente de un cuerpo sometido a polarización es igual numéricamente a la carga total encerrada. Lo dicho se sintetiza matemáticamente por :

$$2 \quad \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

### 006.LA ECUACION DE MAXWELL-GAUSS DE LA ELECTROSTATICA-

El Teorema de Ostrogradsky, demuestra que el flujo del vector, es decir la integral doble cerrada de la componente normal, a través de la superficie  $\Sigma$  que limita una región  $\tau$ , es igual a la integral triple de la divergencia de dicho vector, a través de esa región.

$$3. \quad \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$



Por otra parte, si damos participación a la densidad volumétrica de carga:

$$4. \quad Q = \iiint_{\tau} \rho_{\tau} \cdot d\tau$$

Reemplazando en la ecuación 2.

$$5. \quad \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho_{\tau} \cdot d\tau$$

Desde que, las integrales son definidas a través de los mismos límites de integración, sus integrandos son iguales

$$6) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

Se trata de la primera ecuación de Maxwell.

El mismo fenómeno se halla expresado en forma integral en la ecuación 2, mientras que en la ecuación 6, se expresa en forma diferencial.



## 0007.-PROPIEDADES DEL CAMPO ELECTRICO

Las características que presenta el campo eléctrico son motivo de especial atención. A partir de Gauss, se considera la presencia de una manifestación de fuerzas alrededor de un cuerpo polarizado y por ende normal a la superficie exterior.

El flujo electrostático emergente como así el Campo Eléctrico se calcula en base al Teorema de Gauss, previa envoltura mediante una superficie gaussiana.

Si utilizamos la expresión integral de Maxwell-Gauss:

$$1. \quad \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{Q}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

La ecuación precedente constituye una herramienta importante, cuando se observa simetría en la configuración particular que se analiza,

Por el contrario, cuando esa condición no se da, se recurre a la expresión del Campo Eléctrico diferencial, según Coulomb.

$$2. \quad d\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \frac{\rho_{\Sigma} \cdot d\Sigma}{r^2}$$

## 0008.-EL CAMPO ELECTRICO ES RADIAL

Para demostrar esta propiedad se recurre a la siguiente ejercitación.

El vector de posición en el espacio se expresa vectorialmente.

$$3. \quad \vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z$$



*El vector Campo Eléctrico se expresa:*

$$4. \quad \vec{E} = \vec{i} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Qx}{r^3} + \vec{j} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Qy}{r^3} + \vec{k} \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Qz}{r^3}$$

*Se desea conocer el versor unitario del vector Campo Eléctrico:*

$$5. \quad \vec{E}^0 = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} \text{ Reemplazando en esta última y teniendo}$$

*en cuenta que:*

$$6. \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$7. \quad |\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

*Al proceder a efectuar las simplificaciones correspondientes nos queda:*

$$8. \quad \vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

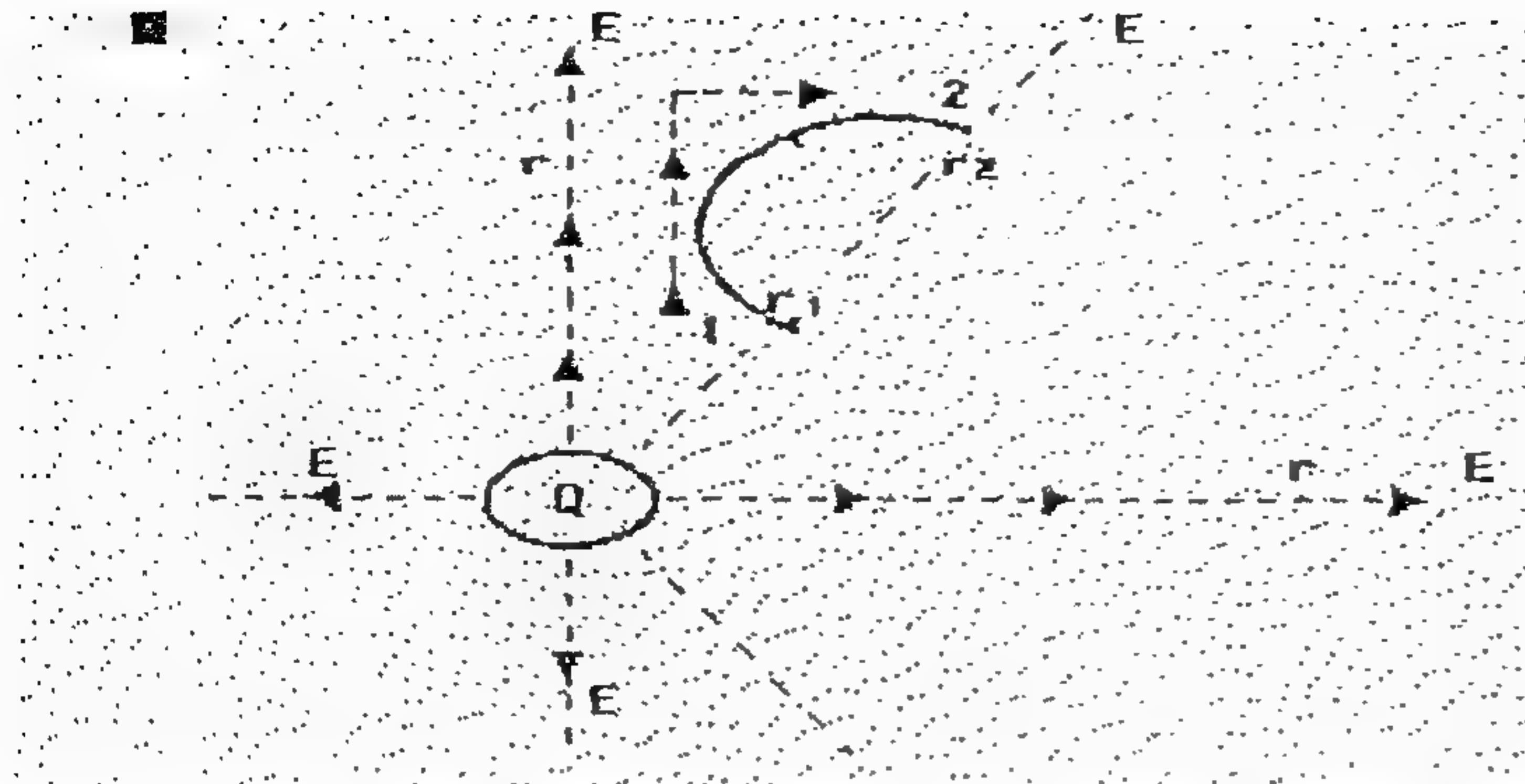
*El versor unitario del Campo coincide con el versor unitario del vector de posición, con lo cual queda demostrada la propiedad que nos ocupa.*

#### **0009.-EL CAMPO ELECTRICO ES CONSERVATIVO**

*Para demostrar esta propiedad procedemos a mover una partícula de carga unitaria, de un punto a otro, en la zona de influencia de un campo eléctrico.*

*Si la partícula se mueve desde el punto 1 al 2.*

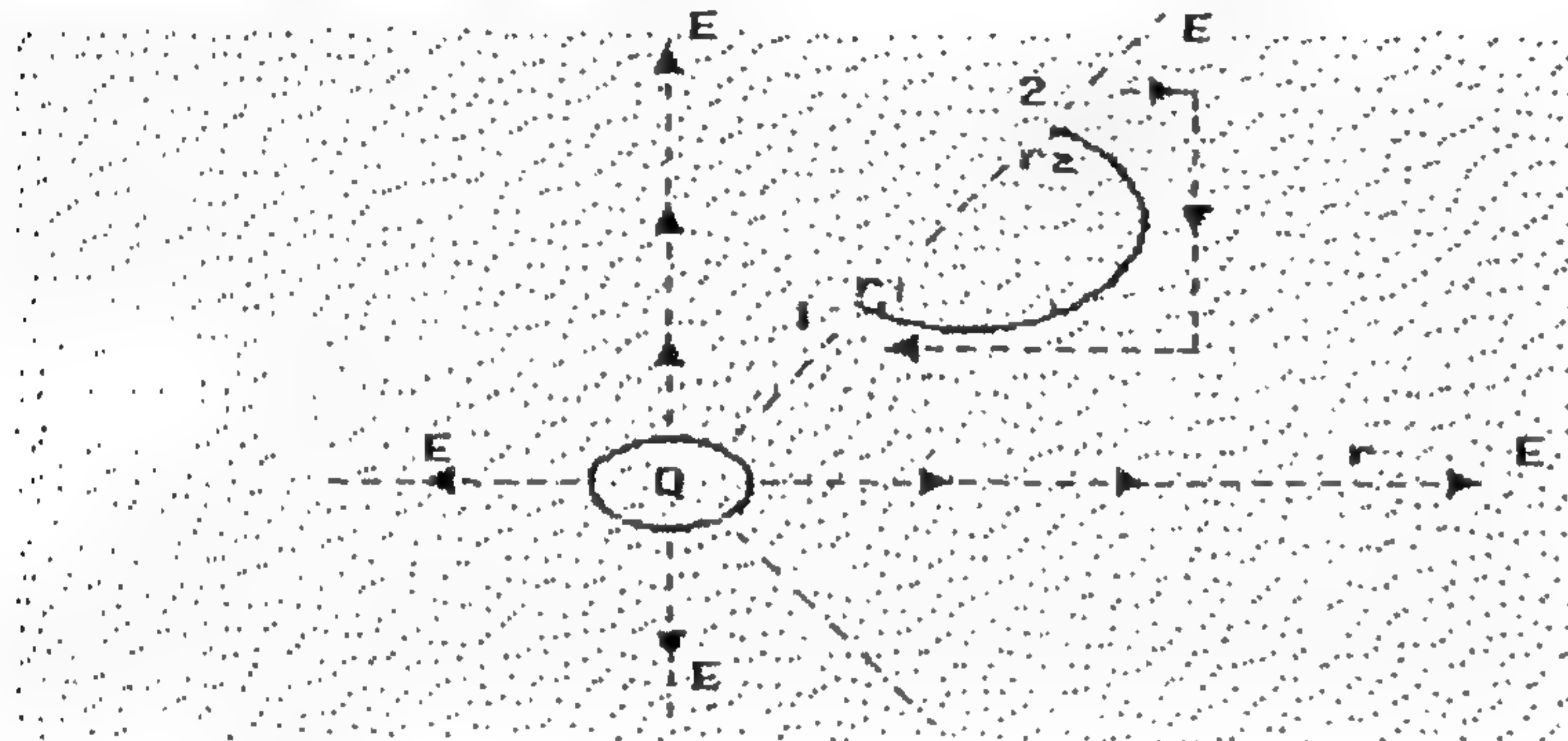




Ello desarrolla un trabajo dado por:

$$1. \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_2 - U_1$$

Si ahora, procedemos a calcular el trabajo moviendo desde el punto 2 al 1.



$$2. \int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2$$

Consecuentemente, si efectuamos la integral curvilínea a lo largo de cualquier trayectoria:

$$3. \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Ello implica que el campo es conservativo, toda vez que el movimiento desarrolla trabajo solo cuando el trayecto coincide con la dirección del campo, mientras que por el contrario, cuando es normal a la misma, es nulo.



**Podemos aseverar que la energía gastada en mover la partícula desde 1 a 2, es recobrada al volver a la posición inicial.**

**En otro orden, es dable destacar que la función es potencial pues se trata de una función de puntos, es decir, el potencial depende en cada punto solo de la distancia a la carga generadora del campo.**

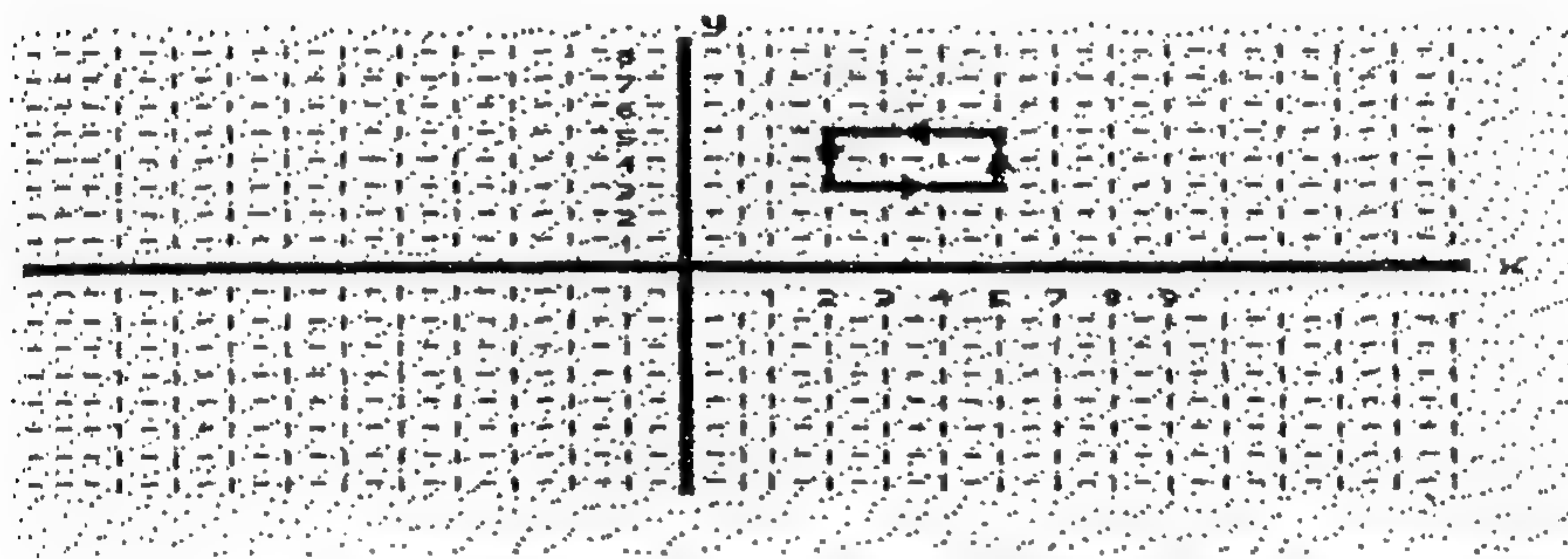
$$4. \quad U_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r_1}$$

$$5. \quad U_2 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \frac{Q}{r_2}$$

**Asímismo esta propiedad es la que permite afirmar que un campo tiene fuentes y sumideros, la línea de fuerza nace en un conductor y fenece en otro.**

**En la superficie de un conductor por ello, la componente tangencial del campo es nula.**

$$6. \quad E_T = 0$$



**Supongamos tener en el origen de coordenadas una carga puntual:**

**La trayectoria cerrada se halla bajo la influencia del campo generado por la misma.**

**Procedemos a efectuar la integral curvilínea cerrada a partir del punto P(2;3).**



$$a) \int_{(2;3)}^{(5;3)} E \cdot dl = kQ \int_{(2;3)}^{(5;3)} \frac{x \cdot dx}{(x^2 + 3^2)^{\frac{3}{2}}} = kQ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} \Big|_2^5 = kQ \frac{1}{\sqrt{34}} - kQ \frac{1}{\sqrt{13}}$$

2.c-

$$b) \int_{(5;3)}^{(5;5)} E \cdot dl = kQ \int_3^5 \frac{y \cdot dy}{(y^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = kQ \frac{1}{\sqrt{y^2 + 25}} \Big|_3^5 = kQ \frac{1}{\sqrt{50}} - kQ \frac{1}{\sqrt{34}}$$

$$c) \int_{(5;5)}^{(2;5)} E \cdot dl = kQ \int_5^2 \frac{x \cdot dx}{(x^2 + 5^2)^{\frac{3}{2}}} = kQ \frac{1}{\sqrt{x^2 + 25}} \Big|_5^2 = kQ \frac{1}{\sqrt{29}} - kQ \frac{1}{\sqrt{50}}$$

$$d) \int_{(2;3)}^{(2;5)} E \cdot dl = kQ \int_5^3 \frac{y \cdot dy}{(y^2 + 2^2)^{\frac{3}{2}}} = kQ \frac{1}{\sqrt{y^2 + 4}} \Big|_5^3 = kQ \frac{1}{\sqrt{13}} - kQ \frac{1}{\sqrt{29}}$$

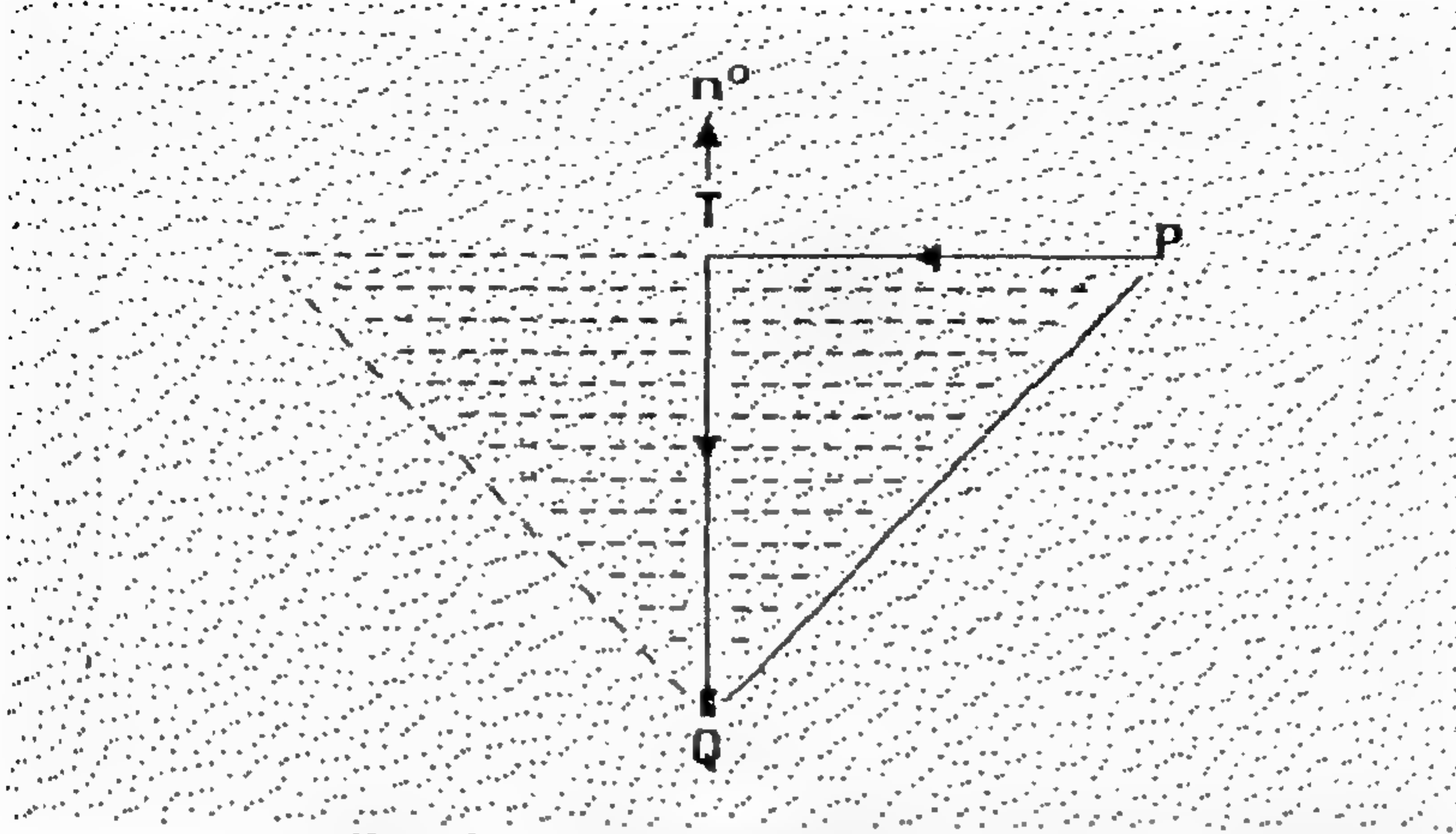
Sumando miembro a miembro las cuatro integrales habremos calculado la integral curvilínea cerrada.

Con lo cual tendremos comprobado una de las propiedades importantes del campo eléctrico.

$$7) \oint_l E \cdot dl = 0$$



## 0010..-ELCAMPO ELECTRICO PROVIENE DE UN GRADIENTE.



En el punto identificado con la letra Q, se halla una carga eléctrica puntual, causal de un campo eléctrico que como se sabe es radial y conservativo.

$$8) \int_Q^P E \cdot dl + \int_P^T E \cdot dl + \int_T^Q E \cdot dl = 0$$

Pero, el trayecto PT, corresponde a una línea equipotencial, normal a la dirección radial del campo por lo que el trabajo en trasportar una partícula unitaria a través de la misma es nulo. De ello se deduce que:

$$9) \int_Q^P E \cdot dl = - \int_T^Q E \cdot dl$$

Lo cual implica que el trabajo entre dos puntos cualquiera, es independiente de la trayectoria.



Asimismo se observa que la mínima separación entre líneas equipotenciales se corresponde con la máxima variación del potencial y por ende con la dirección radial del campo.

Ahora, si procedemos a analizar la variación del potencial entre líneas equipotenciales, cual una función respecto de una dirección cualquiera, se tiene:

10)

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dU}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dU}{dz} \frac{dz}{ds} = \left( \vec{i} \frac{dU}{dx} + \vec{j} \frac{dU}{dy} + \vec{k} \frac{dU}{dz} \right) * \vec{n}^0$$

En el primer paréntesis nos hallamos con la expresión del vector gradiente de potencial.  $\vec{\nabla} U$

El segundo paréntesis es un vector cuyas partes son los cosenos directores del espacio tridimensional.

$$11) \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$$

Cuyo módulo vale:

$$12) \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$$

Por lo tanto se trata del versor unitario, normal a la superficie equipotencial y paralelo a la dirección del campo eléctrico. En consecuencia:

$$13) \frac{dU}{ds} = \vec{\nabla} U * \vec{n}^0$$

Multiplicando miembro a miembro por dicho versor unitario.

$$14) \vec{n}^0 \frac{dU}{ds} = \vec{\nabla} U$$



La última expresión nos permite apreciar que la máxima variación del potencial se corresponde con la mínima separación entre líneas, es decir con el módulo del gradiente, o sea el campo.

$$15) \quad |\vec{\nabla} U| = \left| \frac{dU}{ds} \right|$$

La dirección del campo, coincide con la disminución del potencial, con lo cual se arriba a:

$$16) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} U$$

#### 0011.--CRITERIO DE LAPLACE

Desde que la función estudiada precedentemente constituye una función derivada;

$$f(s) = dU / ds$$

y por cuanto se trata del máximo de dicha función, que, consecuentemente coincide con la dirección del campo, al aplicar el análisis matemático cabe consignar que:

$$17) \quad \frac{d^2 U}{ds^2} = 0$$

En coordenadas rectilíneas, nos encontramos con la conocida fórmula de Laplace.

$$18) \quad \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = 0$$

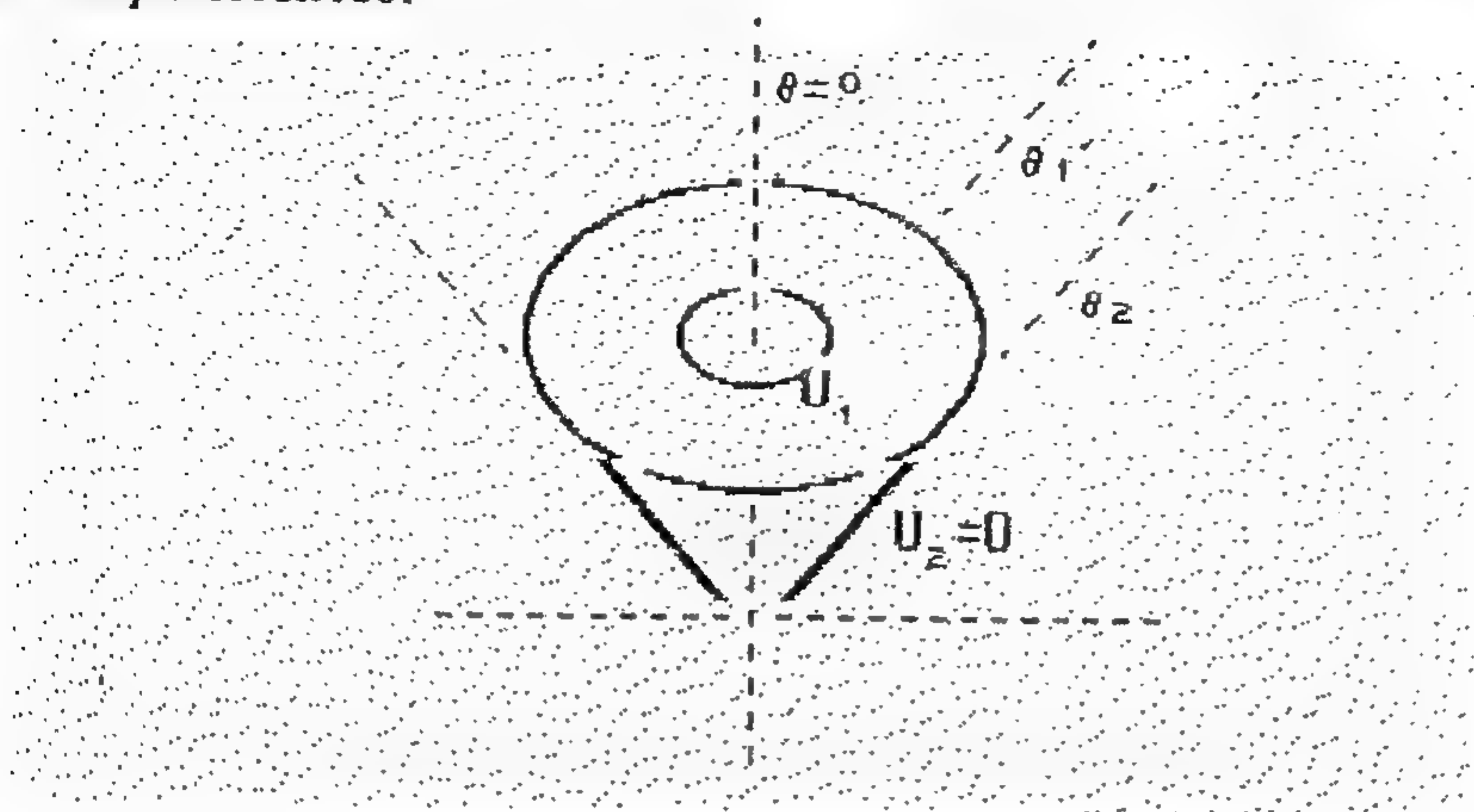
Utilizando el operador de Hamilton:

$$19) \quad \vec{\nabla}^2 U = 0$$



# 012.-APLICACION DEL LAPLACIANO EN LA SOLUCION DE UN PROBLEMA

Se tiene dos conos concéntricos que irradian al espacio libre un campo eléctrico.



Las condiciones de contorno son:

$$\theta_1 \rightarrow U = U_1$$

$$\theta_2 \rightarrow U = 0$$

Se pide obtener una expresión general para el potencial entre ambos conos en función del ángulo  $\theta$ .

SOLUCION:

$$1) \nabla^2 U = 0$$

Es necesario expresar el laplaciano en coordenadas esféricas.

$$2) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dU}{d\theta} \right) = 0$$

$$3) \sin \theta \cdot \frac{dU}{d\theta} = K_1$$



De donde:

$$4) K_1 \times \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = U$$

Proceso de integración:

$$\int \frac{d\theta}{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} = \int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} = \int \frac{d\frac{\theta}{2}}{\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \times \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \int \frac{\sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot d\frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}$$

$$\int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + K_2$$

$$U = K_1 \times \ln \frac{\theta}{2} + K_2$$

Las constantes de integración pueden ser halladas mediante aplicación de las condiciones de contorno.

$$5) U_1 = K_1 \times \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} + K_2$$

$$6) U_2 = K_1 \times \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} + K_2$$



*Se trata de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:*

$$K_1 = \frac{\begin{vmatrix} U_1 & 1 \\ U_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} & 1 \\ \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{U_1 - U_2}{\ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}$$

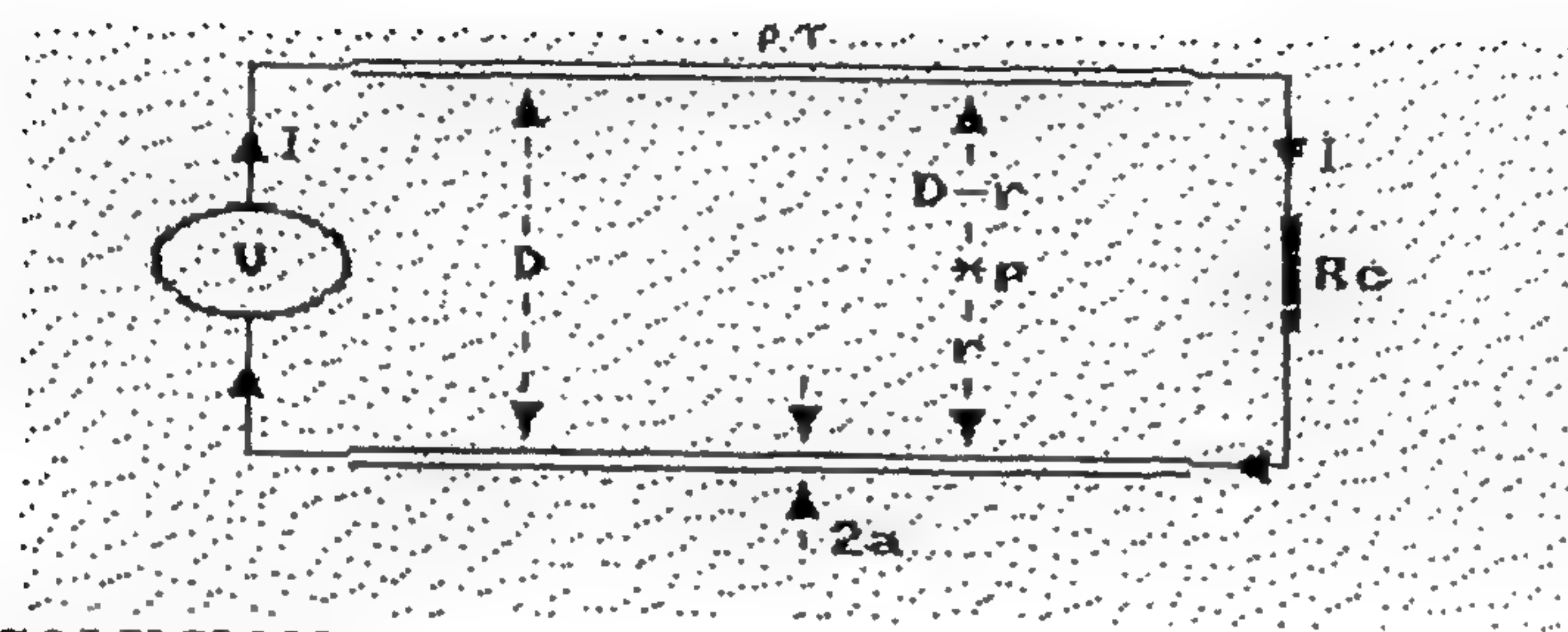
$$K_2 = \frac{\begin{vmatrix} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} & U_1 \\ \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & U_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} & 1 \\ \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{U_2 \times \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - U_1 \times \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}{\ln \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}}$$



### 0012a.-Otras aplicaciones.

Ejemplo;

Obtener la expresión del campo eléctrico correspondiente al dieléctrico de una línea bifilar abierta, compuesta de dos conductores paralelos dotados de una densidad volumétrica de carga  $\rho_v$



SOLUCION

Dibujamos un cilindro cuya superficie exterior pase por el punto "p". Aplicamos el teorema de Gauss.

$$1) \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = \frac{\rho_v \cdot \pi \cdot a^2 \cdot l}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

$$2) E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l = \frac{\rho_v \cdot \pi \cdot a^2 \cdot l}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

$$3) E = \frac{\rho_{\tau} \cdot a^2}{2 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

La contribución del otro conductor nos aporta en el mismo punto "p", un segundo término:

$$4) E = \frac{\rho_{\tau} \cdot a^2}{2 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r} + \frac{\rho_{\tau} \cdot a^2}{2 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot (D - r)}$$

Ejemplo:

Obtener la expresión de la diferencia de potencial entre ambos conductores de una línea bifilar abierta.

SOLUCION

$$5) U = \int_a^{D-a} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho_{\tau} \cdot a^2}{2 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \int_a^{D-a} \left( \frac{dr}{r} + \frac{dr}{D-r} \right) = \frac{\rho_{\tau} \cdot a^2}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

Ejemplo:

Obtener la expresión de la densidad volumétrica de carga:

SOLUCION

$$6) \rho_{\tau} = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0}{a^2 \cdot \ln \frac{D-a}{a}} \times U$$

Ejemplo

Obtener la expresión de la Capacidad distribuida

SOLUCION



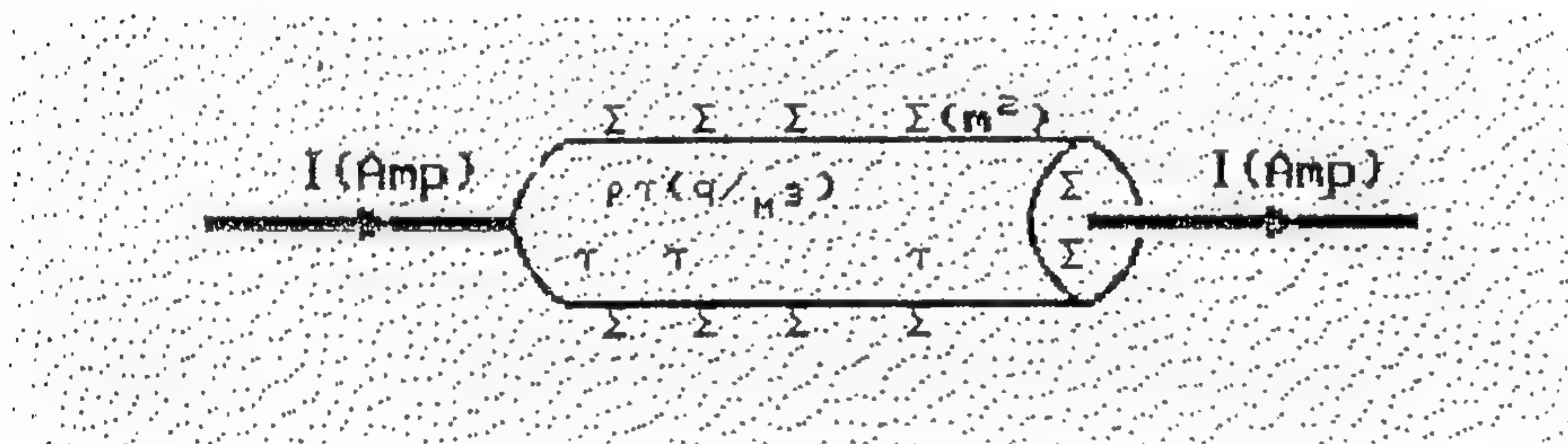
$$7) \quad C(F / m^3) = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0}{a^2 \cdot \ln \frac{D-a}{a}}$$

Cabe destacar que; si multiplicamos por la sección del conductor,  $\pi \cdot a^2$ , tendremos la capacidad distribuida por unidad de longitud.

$$8) \quad C(F / m) = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{D-a}{a}}$$

#### 0013.-ECUACION DE MAXWELL-AMPERE

El análisis que procede se circunscribe al proceso electrodinámico proveniente del movimiento de las partículas eléctricas dentro de la región circuital.



Contamos con una región  $T$ , limitada por una superficie  $\Sigma$ , invadida por una distribución de cargas  $\rho_T$ .

#### 0014.-Principio de Conservación de la Carga.

La razón de cambio a la cual decrece dentro de la región  $T$  es igual a la razón de cambio a la cual sale por la superficie  $\Sigma$  que limita dicha región. Matemáticamente:

$$1) \quad - \frac{dq}{dt} = \oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

#### 0015.-Ecuación de Continuidad

Teniendo en cuenta que:

$$2) \quad q = \iiint_{\tau} \rho_{\tau} \cdot d\tau$$

$$3) \quad \oiint_{\Sigma} \vec{J} \bullet d\tau = \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \bullet \vec{J} \cdot d\tau$$

Consecuentemente:

$$4) \quad -\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho_{\tau} \cdot d\tau = \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \bullet \vec{J} \cdot d\tau$$

Se trata de dos integrales definidas para los mismos límites de integración. Las integrales se efectúan respecto de la zona invadida por las cargas, mientras que las operaciones diferenciales se efectúan respecto del punto de observación. Las integrales que nos ocupan son operadores espaciales, por ello el operador diferencial temporal del primer miembro puede introducirse por compatible, dentro del integrando, sin afectar la ecuación.

$$5) \quad \iiint_{\tau} \left( \vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{d\rho_{\tau}}{dt} \right) \bullet d\tau = 0$$

Desde que la integral es nula y además es definida, su integrando, a su vez, es nulo, con lo cual se llega a:

$$6) \quad \vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{d\rho_{\tau}}{dt} = 0$$

denominada ecuación de continuidad. Cubre todas las posibilidades en lo que se refiere a la velocidad de movimiento de las partículas eléctricas, es decir



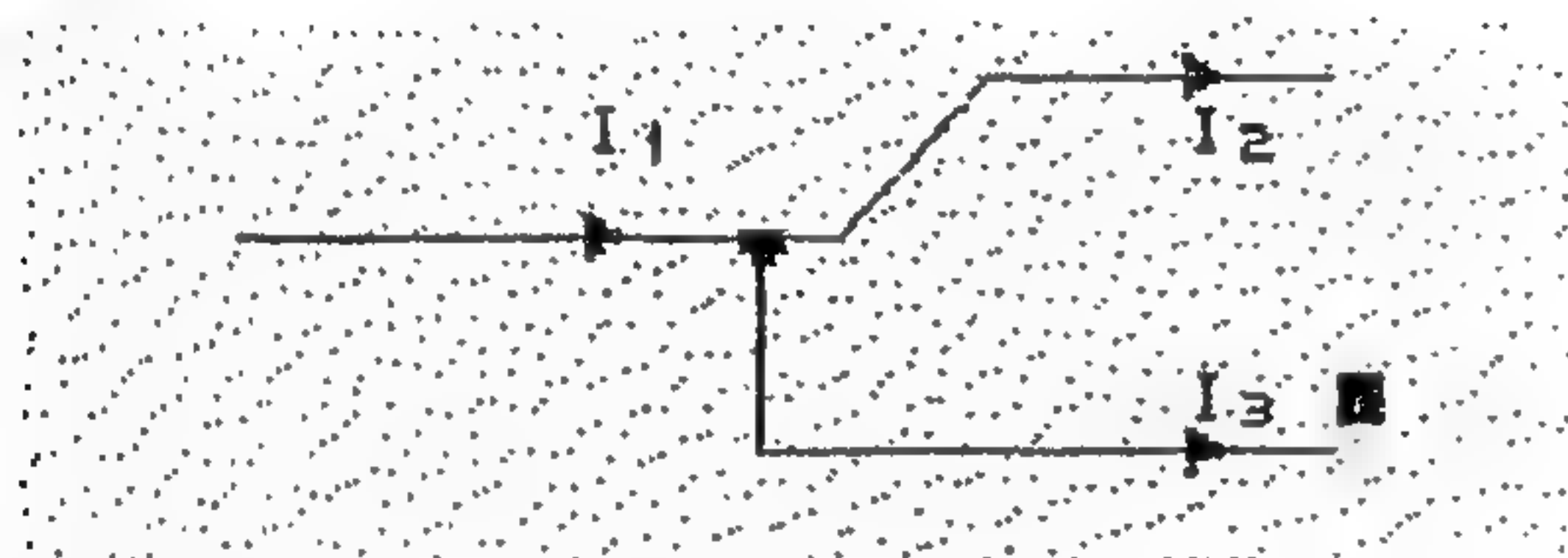
desde el análisis de los circuitos de corrientes constantes, hasta aquellos circuitos que se caracterizan en virtud de las corrientes variables.

### 0016.-Casos Extremos y Particulares de la Ecuación de Continuidad

Podremos destacar por un lado a los circuitos de corriente continua donde la densidad de carga carece de dependencia temporal.

$$7) \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Nos reencontramos aquí con la primera ley de Kirchhoff de la teoría de circuitos.



$$8) I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Por otro lado, cuando se cumple que:  $\frac{d\rho_\tau}{dt} \neq 0$ , nos hallamos

frente a un circuito cuya densidad de carga y por ende las corrientes son variables en función del tiempo, tal como se tiene en un circuito resonante L-C

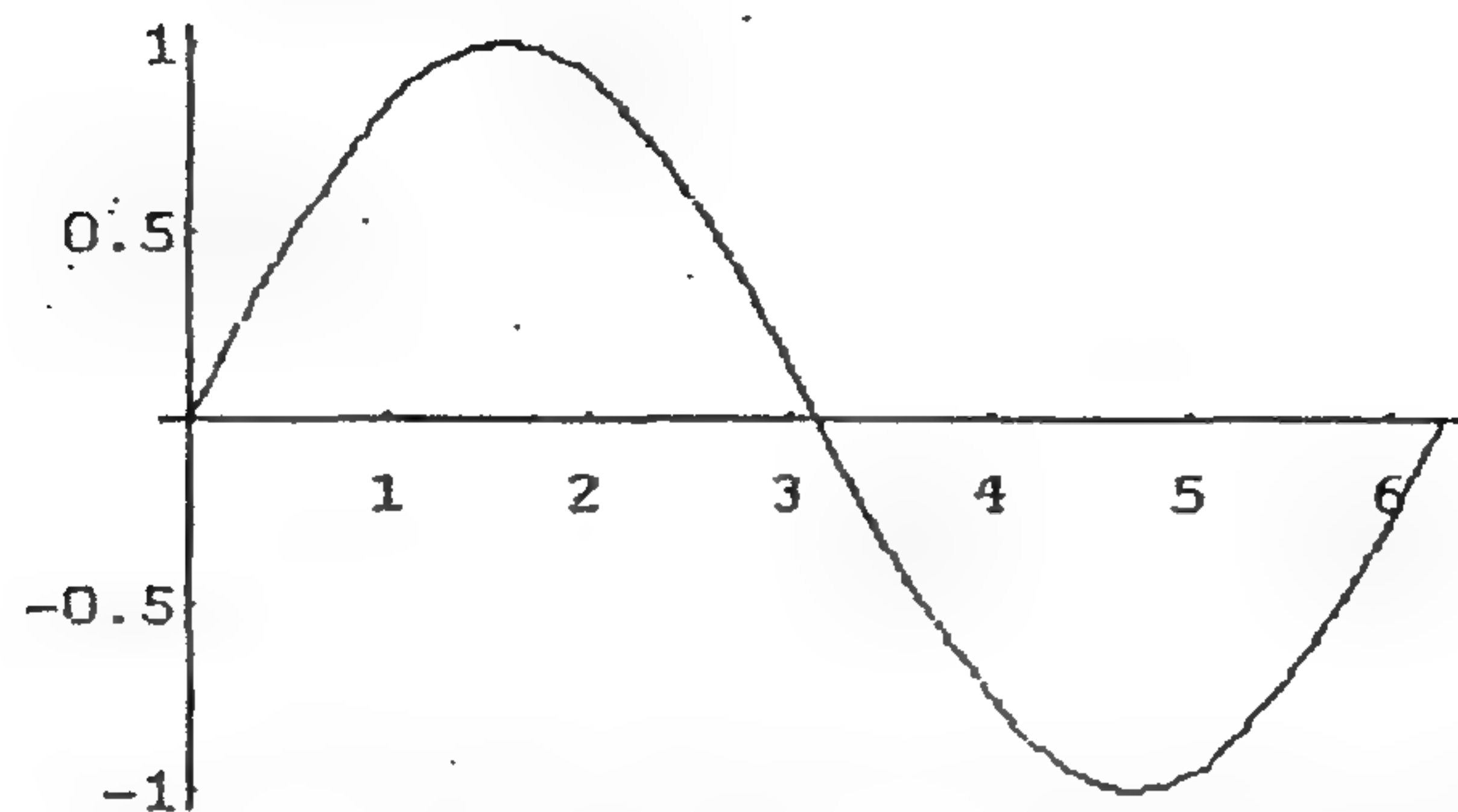


En este circuito la corriente está dada por :

$$9) I = I_0 \times \text{Sen}(\omega.t)$$

Donde  $\omega$ , significa la pulsación de dicha variación e  $I_0$ , el valor máximo de la corriente.

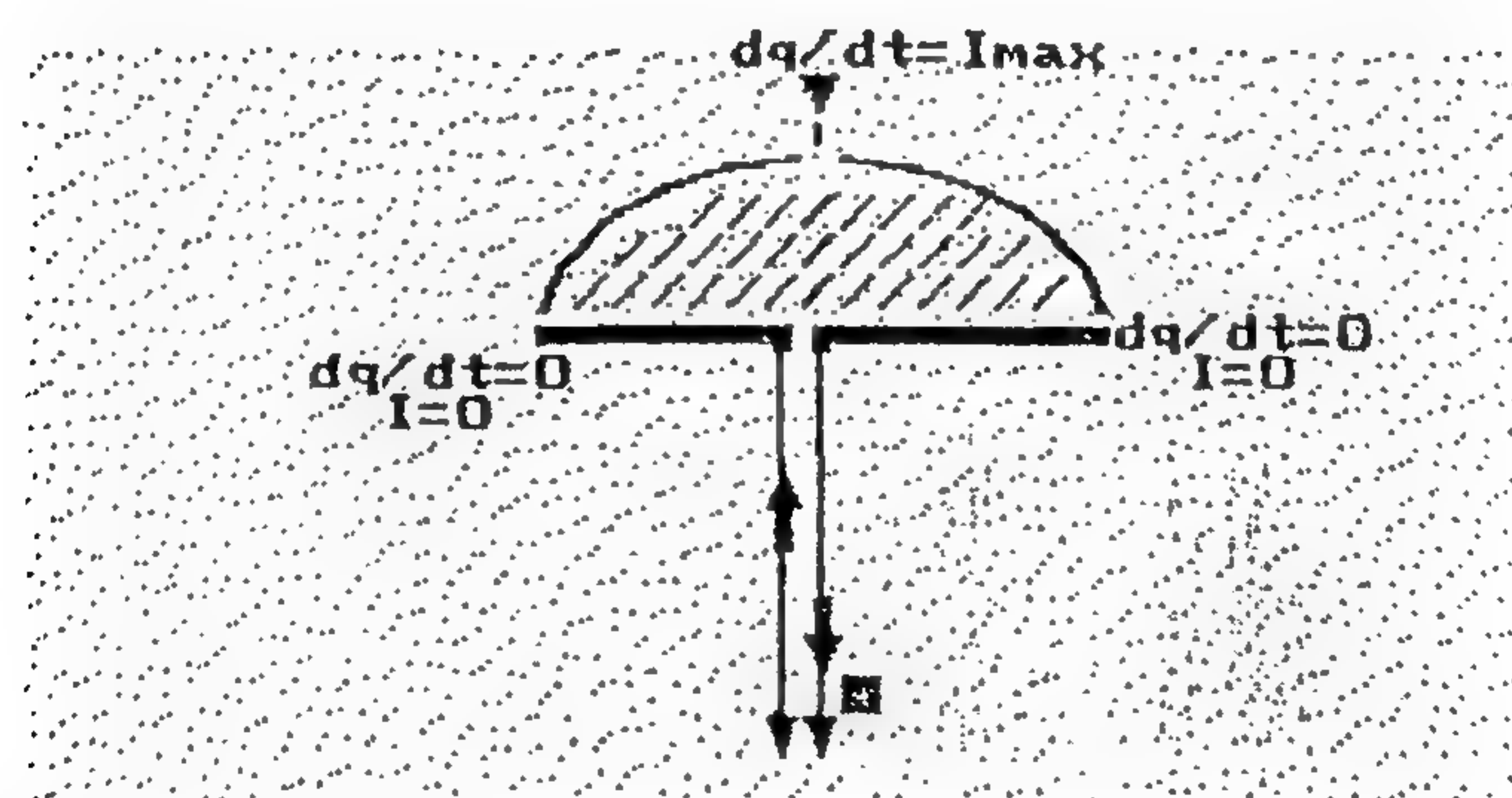
$$10) \omega = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$$



Los componentes son elementos reactivos tales como el capacitor y el inductor, los que acumulan energía que es rechazada sucesiva y permanentemente del uno al otro, lo que justifica el cambio alterno del sentido de circulación de la corriente.

La consecuencia es la existencia de una densidad de carga, en los conductores, variable respecto del tiempo.

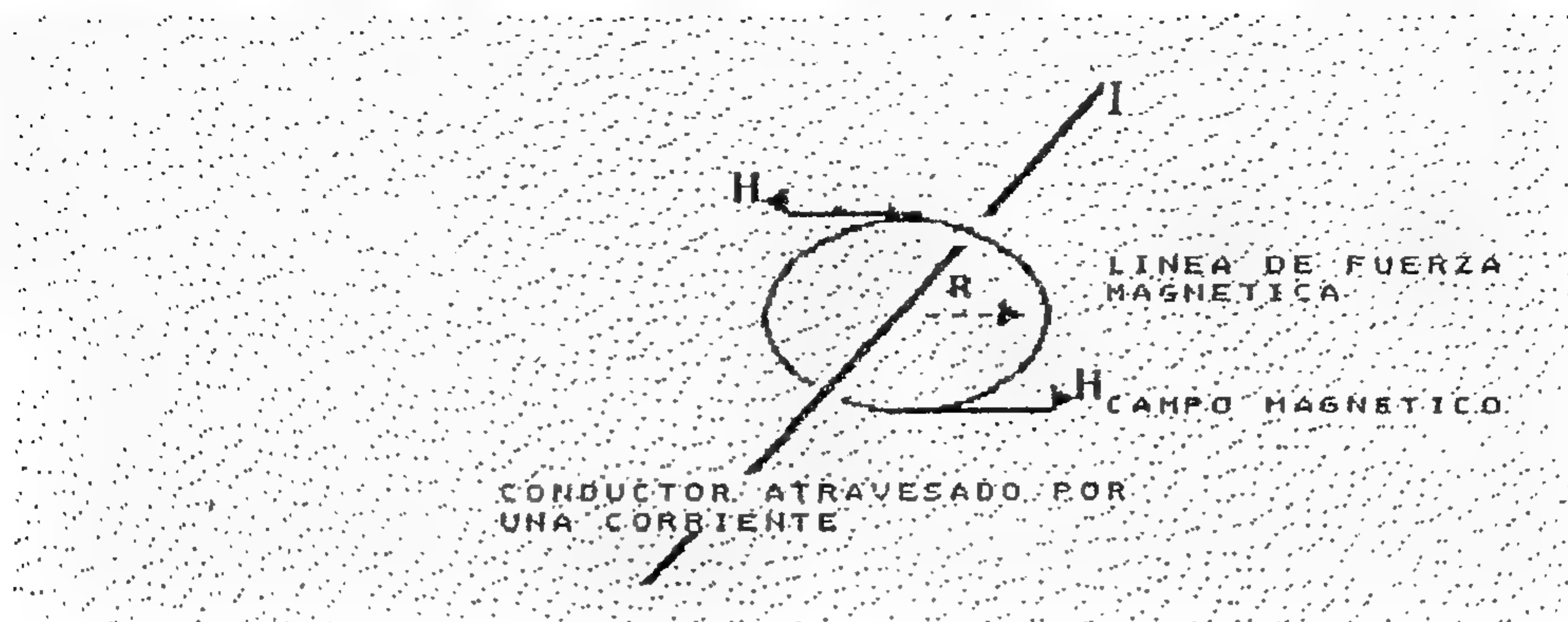
La antena es un circuito resonante abierto que irradia y recibe ondas electromagnéticas, constituyendo un ejemplo típico de densidad de carga variable.



0017.-Ley de Ampere



Andre Ampere enuncia en 1819, el descubrimiento del electromagnetismo. En efecto, comprueba experimentalmente que la circulación de una corriente en un conductor origina a su alrededor una manifestación de fuerza circular, concentrica y continua.



La ecuación de continuidad, es nuestro punto de partida. Desde que las partículas eléctricas, causa fundamental de este proceso electrodinámico, se hallan en general dotadas de un movimiento variado, lo cual hace prever, como caso particular la detención de las mismas, por ende, la generación de un campo electrostático, se da participación al teorema de Gauss y se establece el siguiente sistema de ecuaciones.

$$11) \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_r}{dt} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_r}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \end{cases}$$

Para resolver el sistema, debemos expresar la segunda de las ecuaciones del sistema, de la siguiente forma.

$$12) \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \rho_r$$

*Maxwell denomina vector desplazamiento a la expresión:*

$$13) \quad \vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

*Con lo cual la ecuación de Maxwell-Gauss, nos queda.*

$$14) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_r$$

*Combinando la 14), con la ecuación de continuidad:*

$$15) \quad \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = 0$$

*De acuerdo al análisis vectorial, por ser la divergencia nula, la expresión entre paréntesis constituye un vector que proviene de un rotor.*

$$16) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

*Cabe destacar que en el 2do miembro se hallan presentes la densidad de corriente de conducción que reside en el conductor y la densidad de corriente de desplazamiento, cuyo ámbito o recinto es el medio dieléctrico. La ecuación 16) es la ecuación de Maxwell-Ampere, ó 2da ecuación de Maxwell.*

#### **0018.-Circulación del Campo Magnético.**

*Integrando el rotor del campo magnético dado por la 16). a través de la superficie del flujo, es decir a través del recinto comprendido dentro de la trayectoria circular cerrada de la línea de fuerza magnética, llegamos a la forma integral de la ecuación de Maxwell-Ampere.*



$$17) \iint_{\Sigma_\phi} \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_\phi} \left( J_C + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$18) \iint_{\Sigma_\phi} (\vec{J}_C + \vec{J}_D) \cdot d\vec{\Sigma} = I_C + I_D$$

En otro orden, el teorema de Stokes nos dice que:

$$19) \iint_{\Sigma_\phi} \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

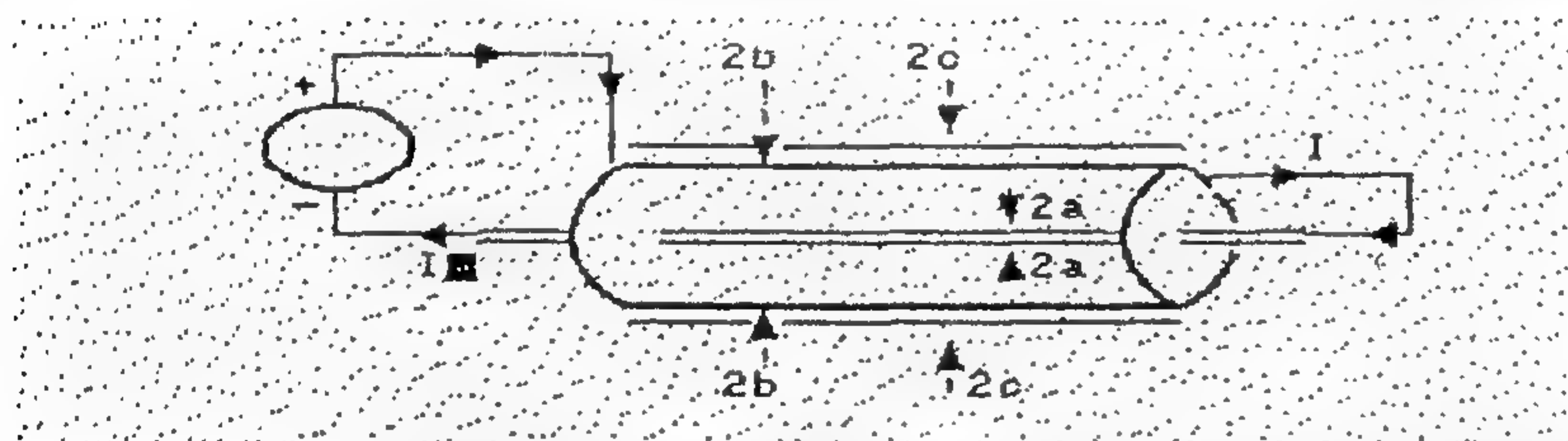
Con lo cual por último nos queda:

$$20) \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Esta última expresión constituye una herramienta práctica para la solución de los problemas electromagnéticos. La misma se hace inaplicable cuando la configuración del dispositivo, carece de simetría. Como veremos luego, para dichos casos se recurre a la fórmula de Biot de cuya deducción nos ocuparemos.

#### 0019.-OBTENCION DE LAS EXPRESIONES DEL CAMPO MAGNÉTICO, EN UN CABLE COAXIL.

a) en el conductor interior;      b) en el dieléctrico.      c) en la cubierta exterior



Las herramientas a utilizar son varias pero, todas dentro de la ley de Ampere.

$$1) \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$2) \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c + \vec{J}_D$$

Si nos ubicamos en un punto interior del conductor central, a una distancia  $r$  del centro.

$$3) 0 \leq r \leq a$$

$$4) \oint_{\ell} H \cdot d\ell = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = J_C \cdot \pi \cdot r^2$$

$$5) \vec{J}_C = \frac{I}{\pi \cdot a^2}$$

$$6) H = \frac{I \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot a^2}$$

El campo varía en función de "r" linealmente dentro del conductor  
Notemos que cuando  $r=a$

$$7) H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

Cuando :

$$8) a \leq r \leq b$$

La anterior expresión del campo es compatible ya que el radio  $a$  se hace genérico y directamente tenemos.

$$9) H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

El campo varía en forma de hipérbola equilátera dentro del dieléctrico.

Si ahora nos ubicamos en la cubierta exterior:

$$10) b \leq r \leq c$$

Dentro de la cubierta tendremos la concurrencia de las dos líneas de fuerza, una procedente del conductor central y otra procedente de la misma cubierta.



$$11) H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = J_C \cdot \pi \cdot (r^2 - b^2)$$

$$12) J_C = \frac{I}{\pi \cdot (c^2 - b^2)} \quad \text{De aquí}$$

extraemos la expresión del campo que pertenece solo al blindaje.

$$13) H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \quad \text{La expresión}$$

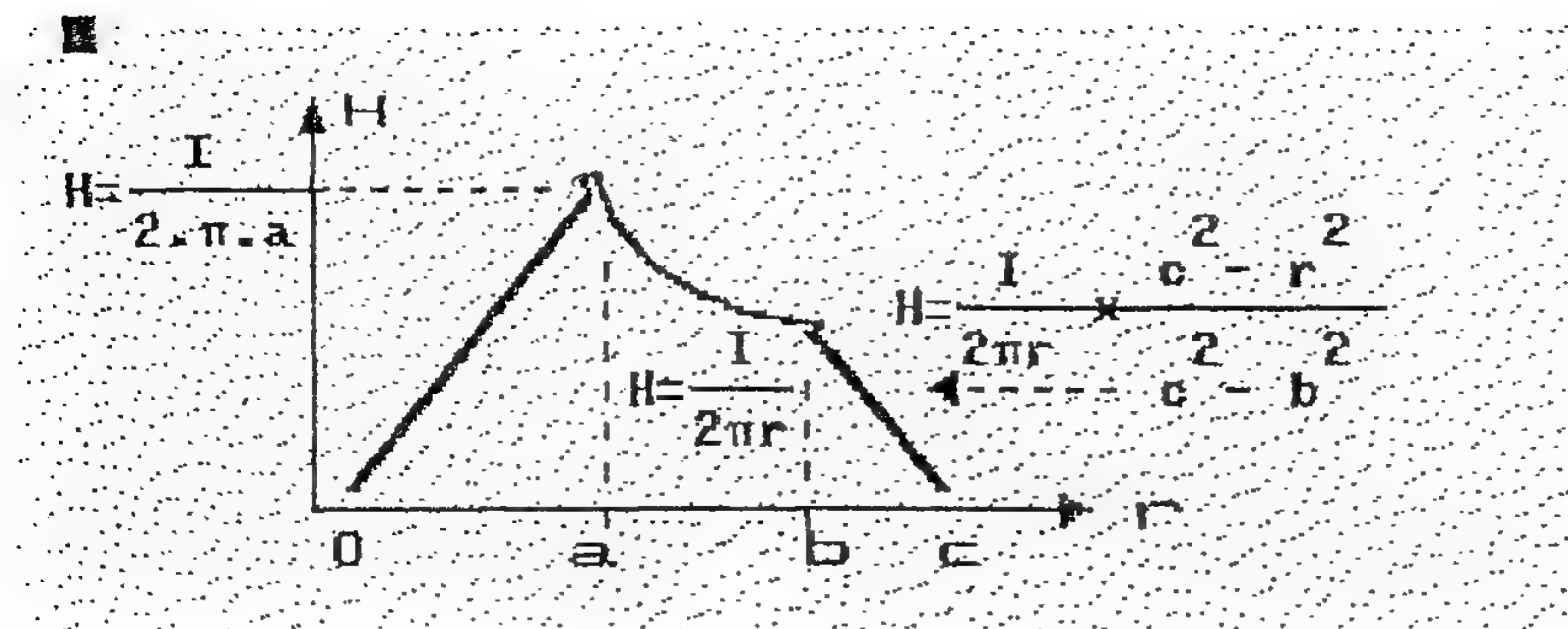
13. responde al campo magnético dentro del espesor del caño metálico, independientemente del conductor central.

Al introducir el conductor central, al estar éste atravesado por la circulación de una corriente de sentido contrario equivale a sumar en dicho blindaje, algebraicamente, ambos campos, lo que arroja:

$$14) H = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

Podemos apreciar que cuando nos hallamos en la parte exterior de la cubierta,  $r=c$ , el campo se iguala a cero, lo que pone de manifiesto la real función de blindaje a los campos electromagnéticos.

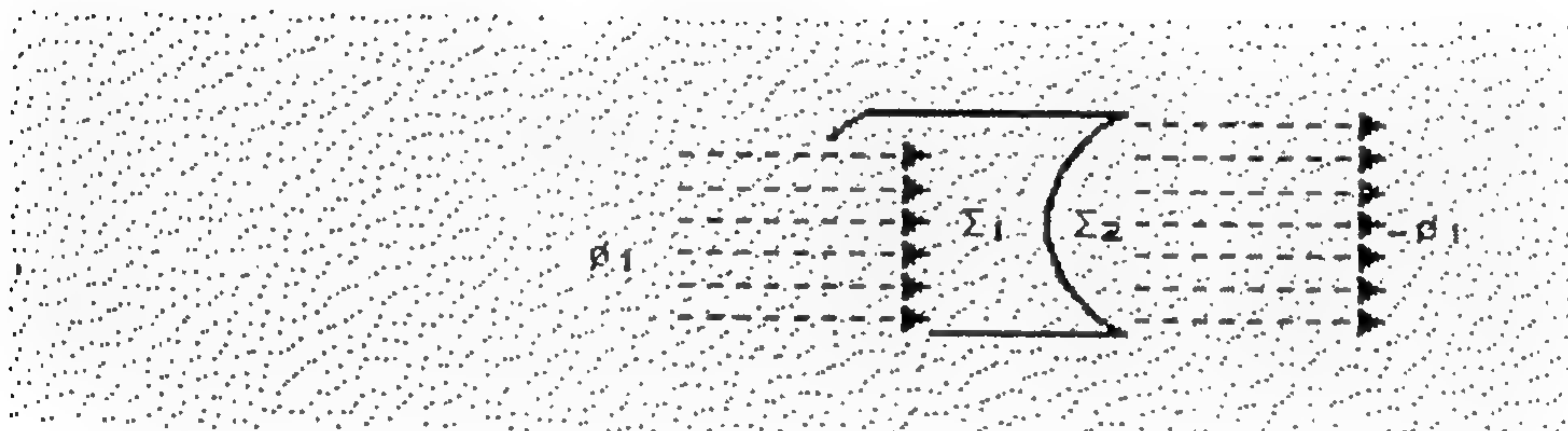
Por el contrario, cuando  $r=b$  nos reencontramos en una condición de contorno de la expresión del campo magnético en el dieléctrico. (Ecuación 9).



## 0020.-ECUACION DE MAXWELL GAUSS DEL MAGNETISMO

Nos ubicamos dentro de un flujo magnético  $\phi$ . Consideramos una región  $\tau$  dentro de ese campo limitada por una superficie  $\Sigma$ .

Si a dicha región la dividimos mediante una línea cerrada, en dos partes, tendremos consecuentemente en la parte exterior 2 Superficies



$$1. \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Tendremos así:

El flujo tanto entrante como saliente se halla relacionado con la densidad de flujo  $B$

$$2). \quad \phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$3) \quad \phi_2 = \iint_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} \text{ Corresponde tener en cuenta}$$

que:

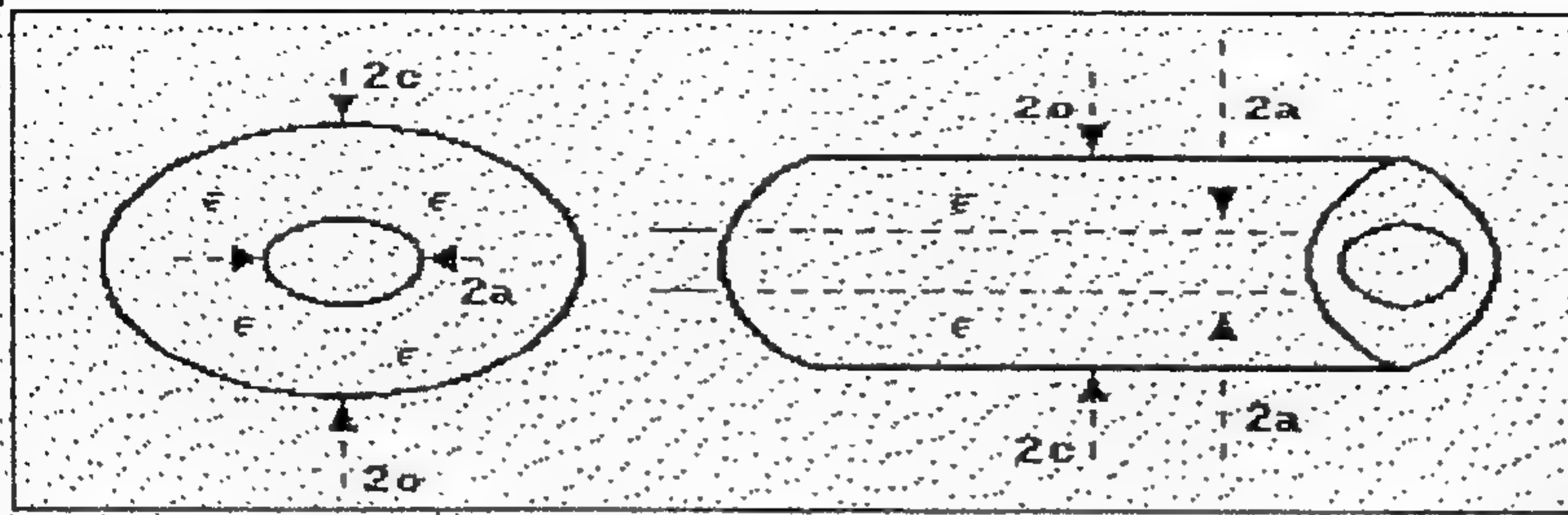
$$4) \quad \phi_1 = -\phi_2$$

Si ahora procedemos a sumar miembro a miembro la 2 con la 3.,

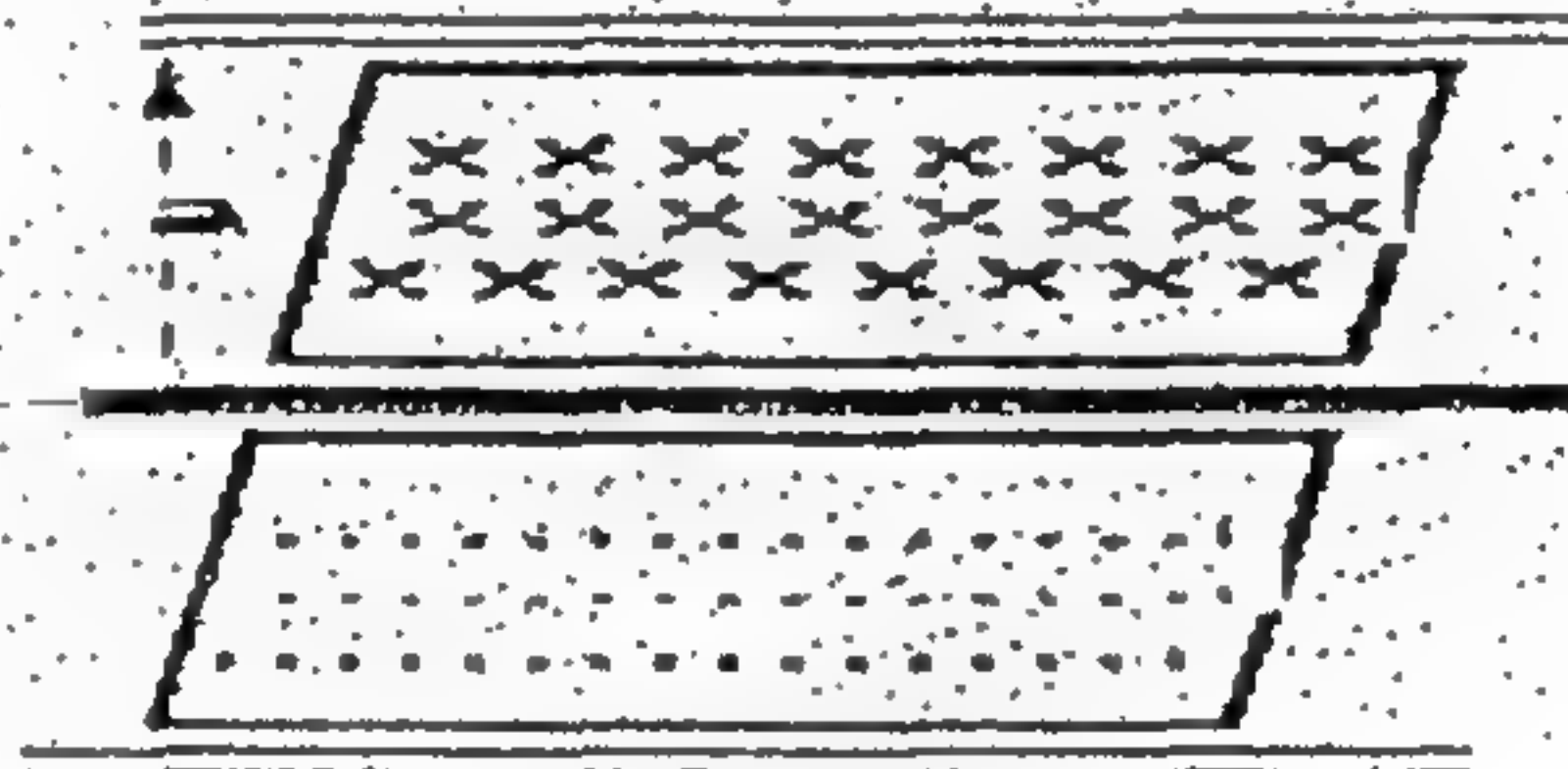


## 0021.-FLUJO MAGNETICO DEL CABLE COAXIAL

Las líneas de fuerza magnéticas son concéntricas alrededor del nervio central del cable. La cantidad de líneas constituyen el flujo magnético cuya zona de influencia es el medio aislante que separa el conductor central de la cubierta.



El flujo magnético atraviesa la superficie longitudinal del cable



$$1) \quad \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot l \cdot dr = \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{I \cdot l}{2 \cdot \pi} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$2) \quad \Phi(\text{Weber}) = \frac{\mu \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi} I \cdot l \cdot \ln \frac{b}{a}$$

## .-INDUCTANCIA DISTRIBUIDA DEL CABLE COAXIAL

La inductancia al igual que la capacidad distribuida forman parte integrante de los elementos reactivos indispensables para el logro de la propagación de la onda electromagnética.

Por ello es uno de los parámetros primarios necesarios con cuya fórmula es conveniente contar.

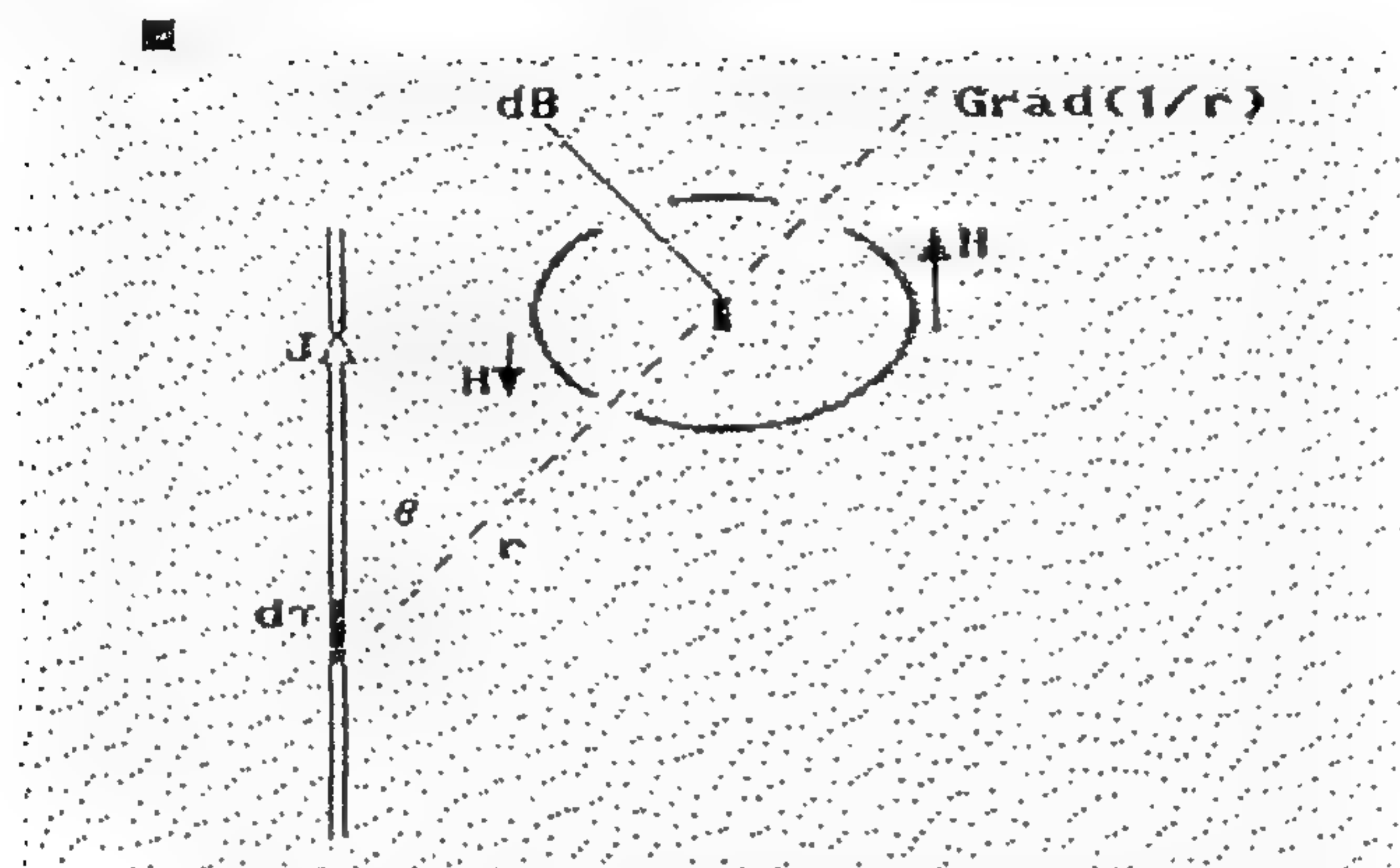
Se define la inductancia como la derivada del flujo respecto de la intensidad de corriente.

$$3) \quad L(\text{Henrios / metro}) = \frac{d\phi}{dI} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(b / a)$$

## 0022.-FORMULA DE BIOT

De acuerdo a la ley de Ampere, la circulación de una corriente eléctrica por un cuerpo conductor crea alrededor líneas de fuerza circulares y concéntricas, que representan el campo magnético  $H$ .

Consideremos un elemento diferencial de volumen dominado por partículas eléctricas en movimiento. Nos ubicamos en un punto  $P$  distante  $r$  del citado elemento.



En el punto  $P$  de observación, tenemos un vector tangencial  $H$  que responde a la ley de Ampere.

Si alrededor de ese punto trazamos una trayectoria circular y efectuamos la integral curvilínea del campo magnético a lo largo de la misma, por cuanto en dicho punto no existen cargas ni quietas ni en movimiento:

$$1) \quad \oint_{\ell} H \cdot d\ell = 0$$

La integral curvilínea nula nos certifica que el vector integrando deriva de un gradiente de potencial

Biot, adopta un potencial Newtoniano, que es en realidad análogo al potencial Coulombiano.

$$2) \quad U = \frac{1}{r}$$

Aplicando el análisis vectorial Biot considera que el diferencial del vector  $B$  es el resultado de la multiplicación vectorial:



$$3) \quad d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \left( \vec{J} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \cdot d\tau$$

El producto vectorial de dos vectores es igual al producto de los módulos por el seno del ángulo comprendido.

$$4) \quad \vec{J} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} = |\vec{J}| \cdot \left| \frac{1}{r^2} \right| \cdot \sin(\theta) \cdot d\tau$$

Es dable entender que cuando se trata de un cuerpo conductor delgado se logra:

$$5) \quad J \cdot d\tau = I \cdot d\ell$$

Con lo cual llegamos a la ecuación de Biot.

$$6) \quad dB = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot I \cdot \frac{d\ell}{r^2} \cdot \sin \theta$$

Generalmente se la encuentra escrita de la siguiente manera:

$$7) \quad dH = \frac{I \cdot d\ell \cdot \sin \theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

En algunos textos se la denomina ecuación de Laplace, pero hay que reconocer el mérito a Juan Bautista Biot quien falleciera en 1862, frances y allegado a Maxwell, el que en 1861 enunciara la teoría ondulatoria del espacio.

Este demuestra que la onda electromagnética se propaga en el espacio libre a la velocidad de la luz y pone de manifiesto la presencia del vector desplazamiento  $D$ .

## 0023.-RESISTENCIA DE AISLAMIENTO DEL CABLE COAXIAL

*Se trata de un cable que posee pérdidas en el dieléctrico.*

*Las pérdidas producen una conductividad nociva en el material aislante que atraviesa la superficie global del mismo.*

*La corriente de fugas está dada por:*

$$1) \quad I_{\varepsilon} = \iint J \cdot d\Sigma$$

*Donde la Integración se efectúa a través de las infinitas capas cilíndricas del dieléctrico desde el nervio central hasta la cubierta.*

*Por otro lado la densidad superficial de corriente está dada por :*

$$2) \quad J_{\varepsilon} = \sigma_{\varepsilon} \cdot E$$

$$3) \quad d\Sigma = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot d\ell$$

*Donde  $\sigma$  es la conductividad de pérdidas del dieléctrico.*

*La diferencia de potencial que se desarrolla a lo largo de la corriente de fugas:*

$$4) \quad U = \int_a^b E \cdot dr :$$

*El campo eléctrico guarda relación con la densidad de corriente superficial de fugas por a través de la conductividad de pérdidas.*



$$5) \quad E = \frac{J_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}} = \frac{I_{\epsilon}}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \ell \cdot \sigma_{\epsilon}} :$$

Reemplazamos ahora en la 4.

$$6) \quad U = \frac{I_{\epsilon}}{2 \cdot \pi \cdot \ell \cdot \sigma_{\epsilon}} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I_{\epsilon}}{2 \cdot \pi \cdot \ell \cdot \sigma_{\epsilon}} \ln(b/a)$$

De donde mediante aplicación de la ley de Ohm, tenemos:

$$7) \quad R_a = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_{\epsilon} \cdot \ell} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

Consecuentemente, Se determina así, la conductancia de pérdidas del dieléctrico por unidad de longitud,

$$8) \quad G_a = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sigma_{\epsilon}}{\ln \frac{b}{a}}$$

Si consideramos, la capacidad distribuida que presenta el cable:

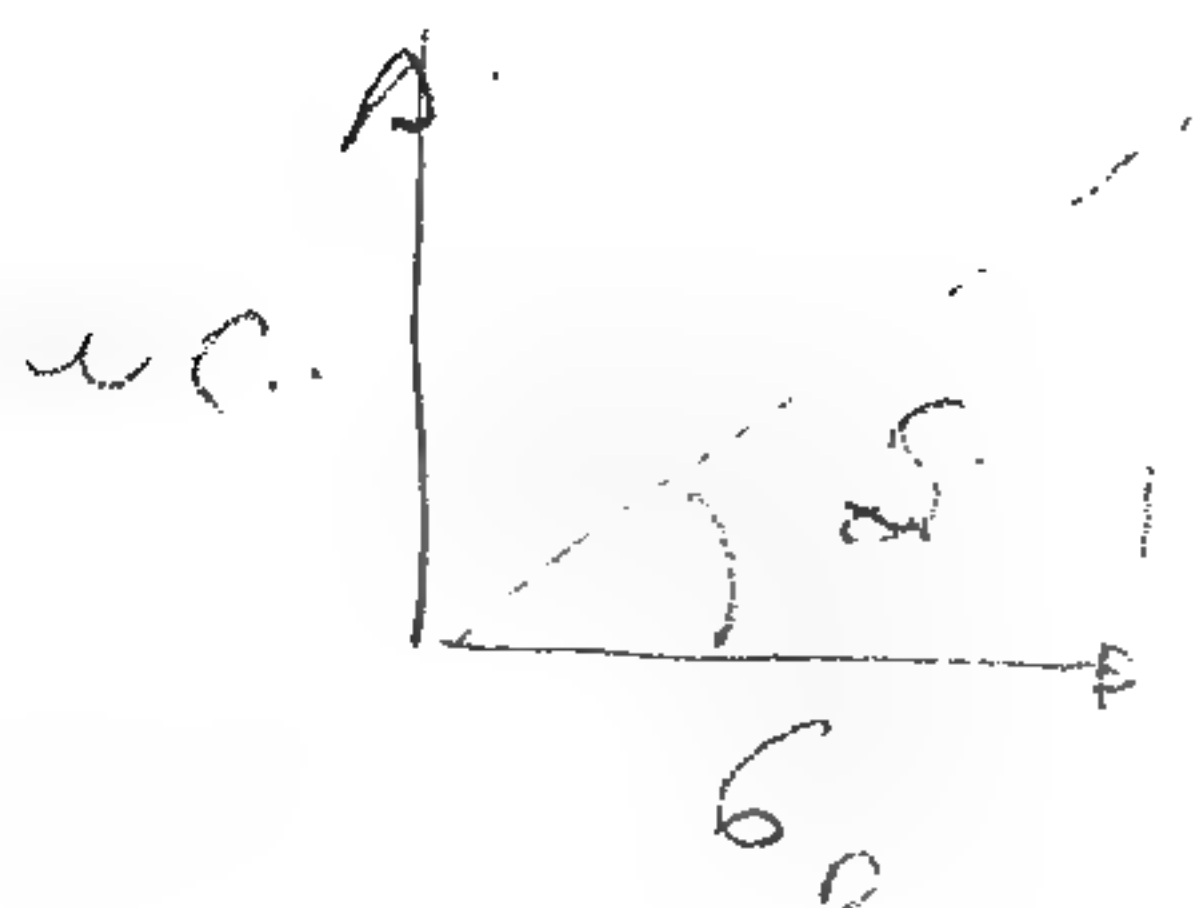
$$9) \quad C(\text{Farad} / m) = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o}{\ln \frac{b}{a}}$$

Damos participación a las pérdidas, identificada con la conductancia precedente:

$\delta$ , es el ángulo de pérdidas del dieléctrico

$$10) \quad G_a = \omega \cdot C \cdot \text{tg} \cdot \delta$$

Si reemplazamos en la 10. la expresión dada por la 9..



$$11) G_a = \frac{\omega \cdot 2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o \cdot \text{tg } \delta}{\ln \frac{b}{a}}$$

Esta última expresión se identifica con la 8.

Con lo cual podemos despejar el valor de la conductividad de pérdidas del dieléctrico.

$$12) \sigma_\epsilon = \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o \cdot \text{tg } \delta.$$

O sea que si analizamos este resultado podemos concluir que el fenómeno se acentúa cuanto mayor es la frecuencia.

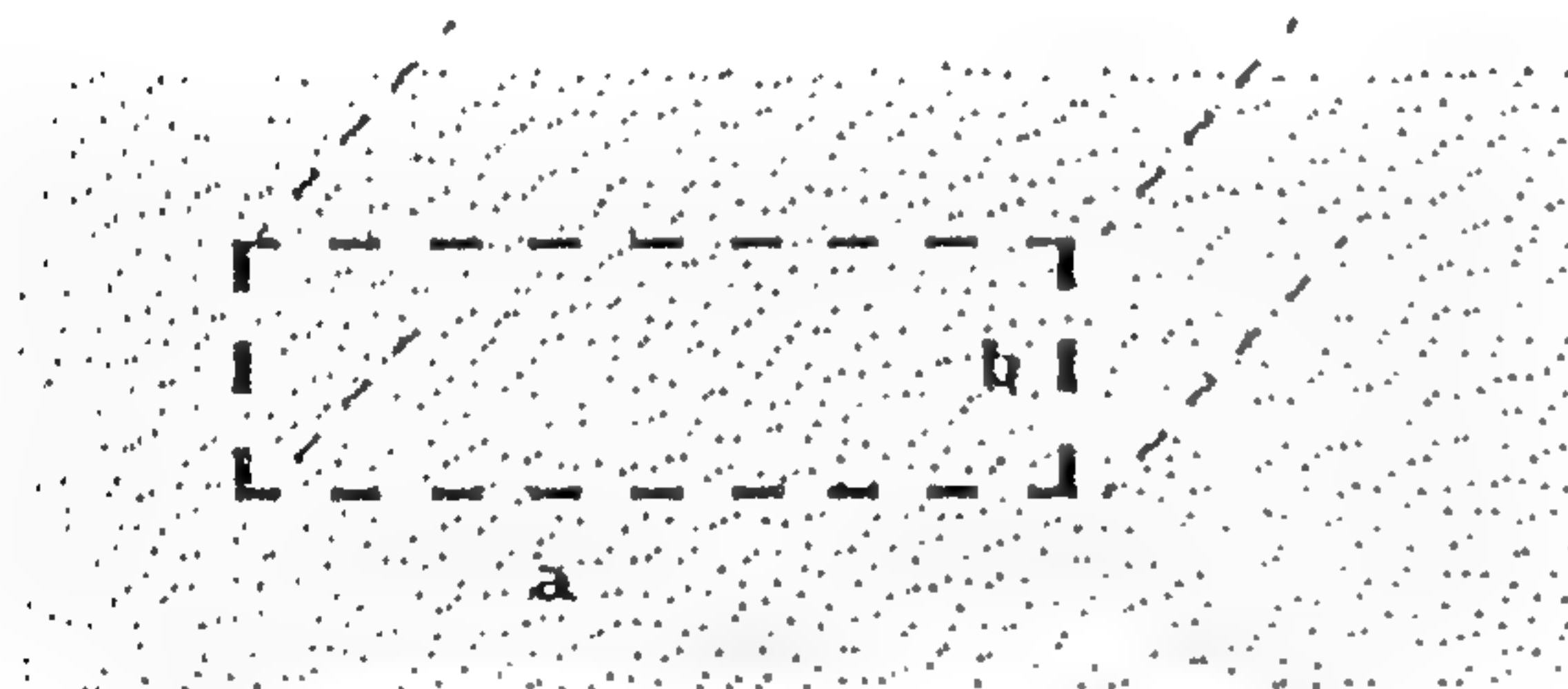
Si el material es de alta calidad el ángulo de pérdidas tiende a cero.

Estudios efectuados por los fabricantes, entre los cuales cabe mencionar a la Firma HELIAX, un valor de frecuencia por arriba del cual, el cable coaxial, por la razón expuesta, pierde utilidad, es el de 2,5GHz.

No obstante, avances tecnológicos en tal sentido, basados en la colocación cada 20cm a lo largo del mismo de rondes construídos a base de teflón, han permitido superar en cierta medida ese límite.

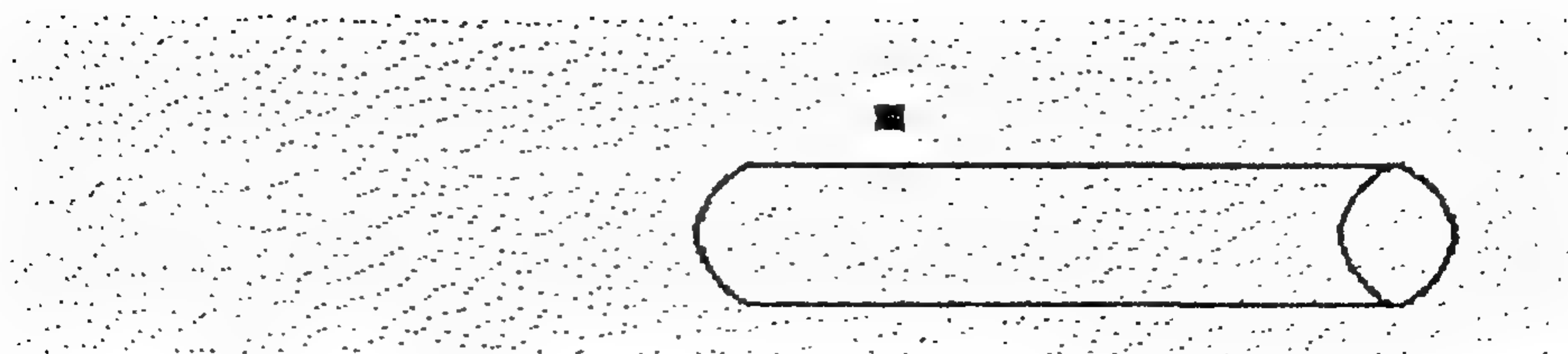
Cuando nos ubicamos en propagaciones en frecuencias del orden de los 4GHz y por arriba del mismo, se recurre a las Guías De Ondas Huecas.

Estas pueden ser rectangulares,:



O pueden ser cilíndricas.





Mediante estas guías se ha logrado incrementar la cantidad de comunicaciones simultáneas.

En tal sentido, cabe señalar que, hoy en día no ha sido superada la capacidad de transmisión de las fibras ópticas.

Al gran ancho de banda, se han sumado los métodos de modulación modernos que han permitido la digitalización de la señal y así lograr un aumento considerable de dicha capacidad.

#### 0024-POTENCIA DESARROLLADA EN EL DIELECTRICO DE UN CABLE COAXIAL SIN PERDIDAS.

Nos ubicamos en una sección transversal del cable, donde procederemos a calcular la potencia, para lo cual tendremos en cuenta las expresiones del campo magnético en el dieléctrico:

$$1) \quad H(A/m) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Del campo eléctrico, en función del potencial:

$$2) \quad E = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{b}{a}}$$

La potencia desarrollada es el flujo del vector de Poynting

$$3) \quad P = \iint_{\Sigma} E \cdot H \cdot d\Sigma \text{ Donde:}$$

$$4) \quad d\Sigma = r dr d\theta$$

Reemplazamos 1., 2. y 4 en la 3.

$$5) \quad P = \iint_{\Sigma} \frac{U}{r \ln \frac{b}{a}} \frac{I}{2\pi r} r dr d\theta$$

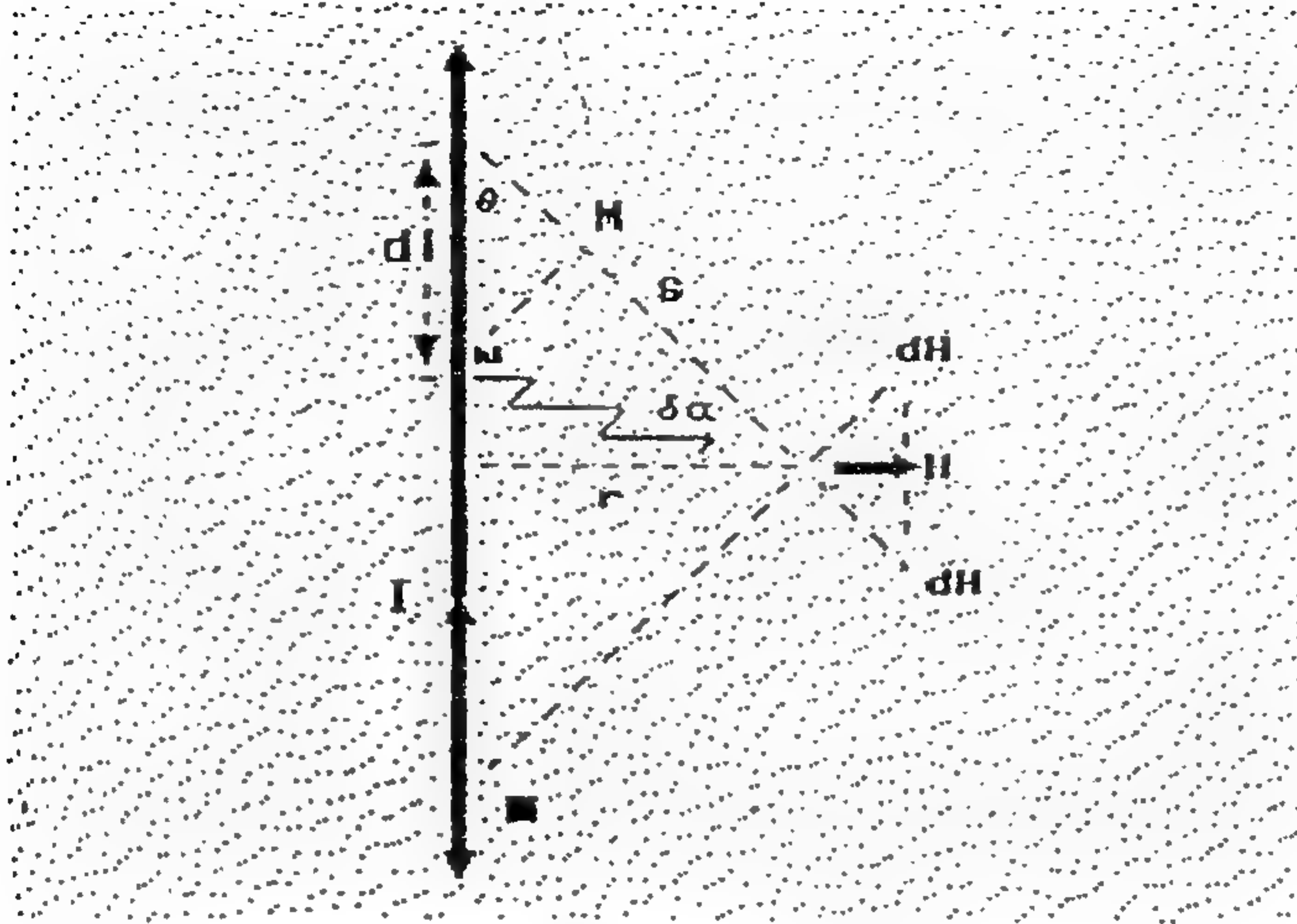
$$6) \quad P = \frac{U \cdot I}{2\pi \ln \frac{b}{a}} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta = U \cdot I$$

El desarrollo permite ver que mediante la teoría de los campos se llega al mismo resultado de la teoría de circuitos



### 0025.-APLICACION DE BIOT

1. Se obtiene el Campo Magnético  $H$ , a una distancia  $r$  de un conductor recto atravesado por una corriente.



La ecuación de Biot nos dice:

$$1). \quad dH = \frac{I \cdot dl \cdot \sin(\theta)}{4 \cdot \pi \cdot S^2}$$

El ángulo  $\theta$  es el comprendido entre  $S$  y  $r$

De acuerdo a la configuración, podemos establecer las relaciones que nos permitan reducir la cantidad de variables en el proceso de integración del  $dH$ .

$$2). \quad \frac{S \cdot d\alpha}{dl} = \sin \theta = \cos \alpha = \frac{r}{S}$$

de donde se deduce que:

$$3). \quad \frac{dl}{S^2} = \frac{d\alpha}{r}$$

Durante el proceso de Integración la componente según  $r$  se anula, por lo que resta calcular la otra proyección.

$$4). \quad dH = \frac{I \cdot \cos \alpha}{4 \cdot \pi \cdot r} \bullet d\alpha$$

*Procedemos a integrar :*

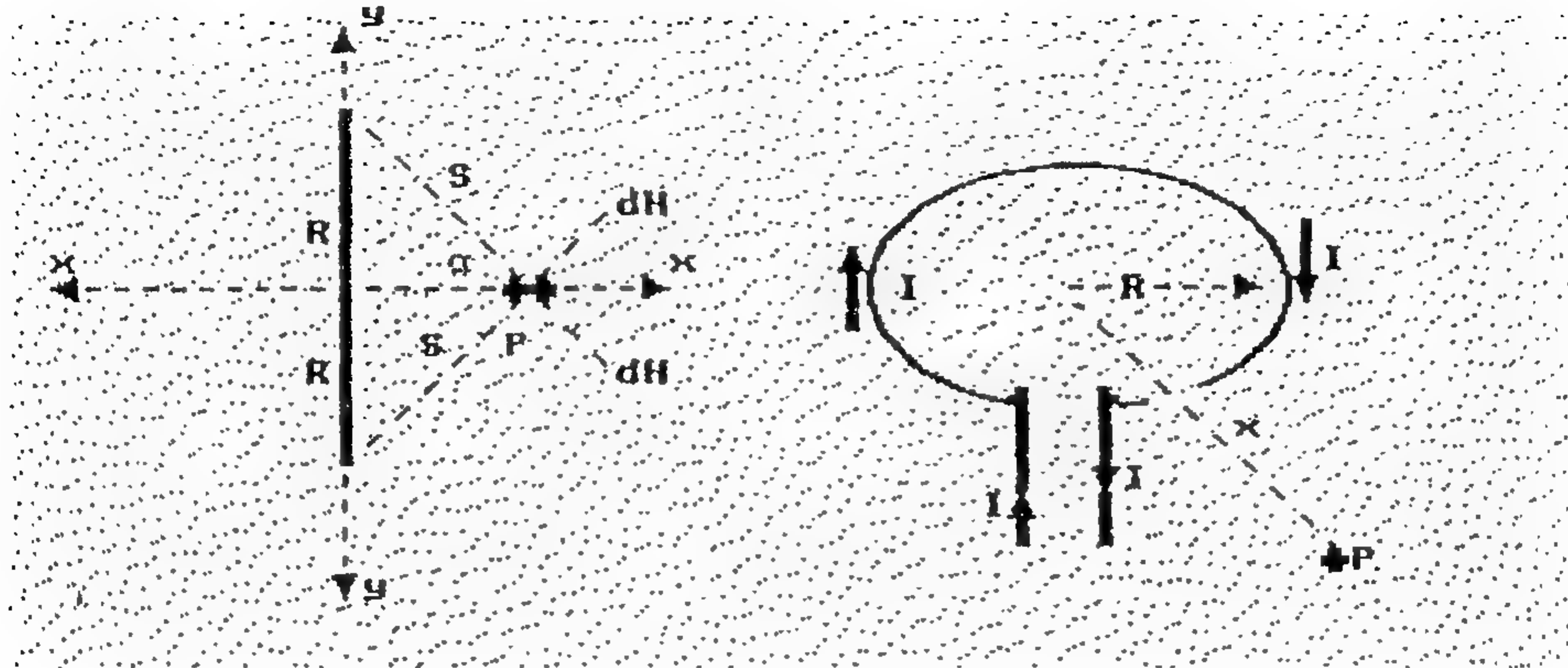
$$5). \quad H = \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha}{4 \cdot \pi \cdot r}$$

*Cuyo resultado nos arroja :*

$$6). \quad H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$



**0026.-CAMPO MAGNETICO EN UN PUNTO DEL EJE DE UNA ESPIRA CIRCULAR ATRAVESADA POR UNA CORRIENTE**



El punto "P" de observación se halla a la distancia " x " del centro de la espira y a la distancia "S" de un infinitésimo de la longitud de dicha espira.

Aplicamos nuevamente Biot

$$1) \quad dH = \frac{I \cdot dl \cdot \text{Sen } \theta}{4 \cdot \pi \cdot S^2}$$

Si "R", es el radio de la espira:

$$2) \quad R^2 + x^2 = S^2$$

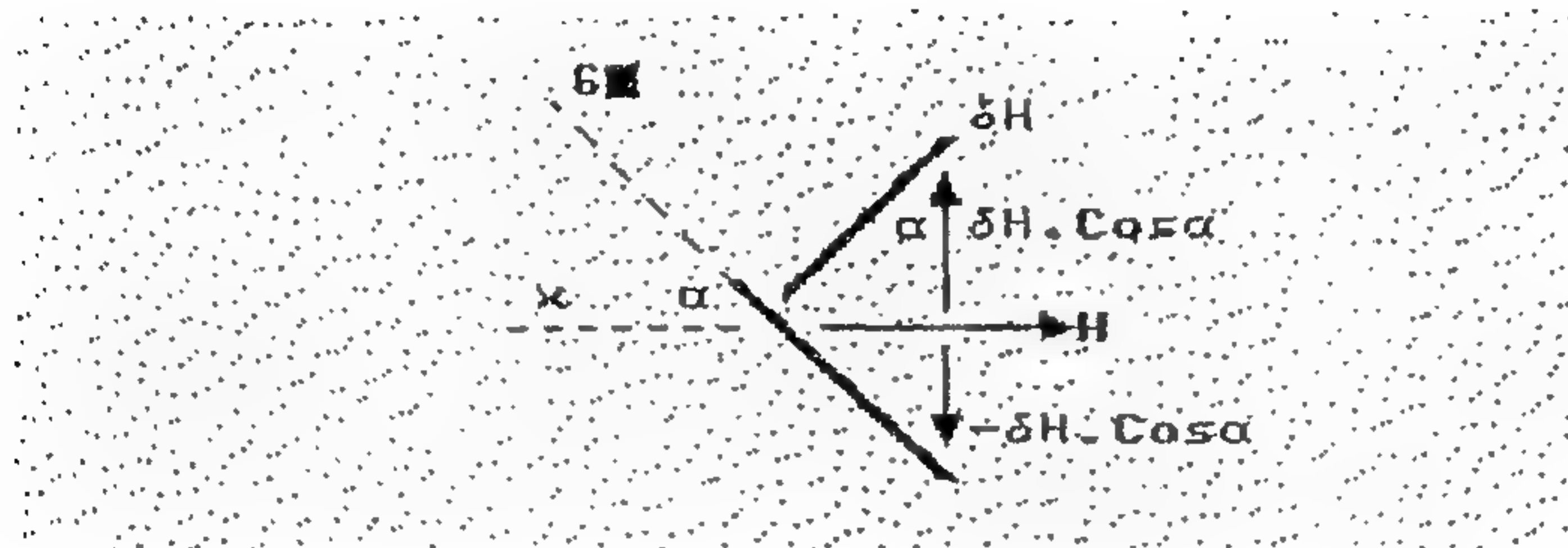
El angulo comprendido entre el conductor y el segmento "S", en toda la trayectoria es igual a 90°.

Por ello:

$$3) \quad \text{Sen} \theta = 1$$

El proceso de integración se efectúa a lo largo de la espira circular donde la única variable es la longitud.

La componente vertical del campo se anula, quedando sólo la componente horizontal.



$$4) \quad H = \frac{I \cdot \text{Sen} \alpha}{4 \cdot \pi \cdot S^2} \int_0^{2 \cdot \pi \cdot R} dl = \frac{I \cdot \frac{R}{S}}{4 \cdot \pi \cdot S^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot S^3}$$

$$5) \quad H = \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

#### 0027.-CAMPO MAGNETICO EN EL CENTRO DE LA ESPIRA

Si desplazamos el punto P hacia el centro de la espira;  $x=0$ . Por lo tanto:

$$\textcircled{X} \quad 6) \quad H_C = \frac{I}{2 \cdot R}$$



# 0028.-ECUACION DE MAXWELL-FARADAY

Nuestro punto de partida lo hallamos en un circuito eléctrico simple.



La Ley de Ohm nos dice que :

$$1). \quad I = \frac{U_g}{r}$$

De donde podemos expresar:

$$2). \quad U_g = I \cdot r$$

Si multiplicamos miembro a miembro por la corriente :

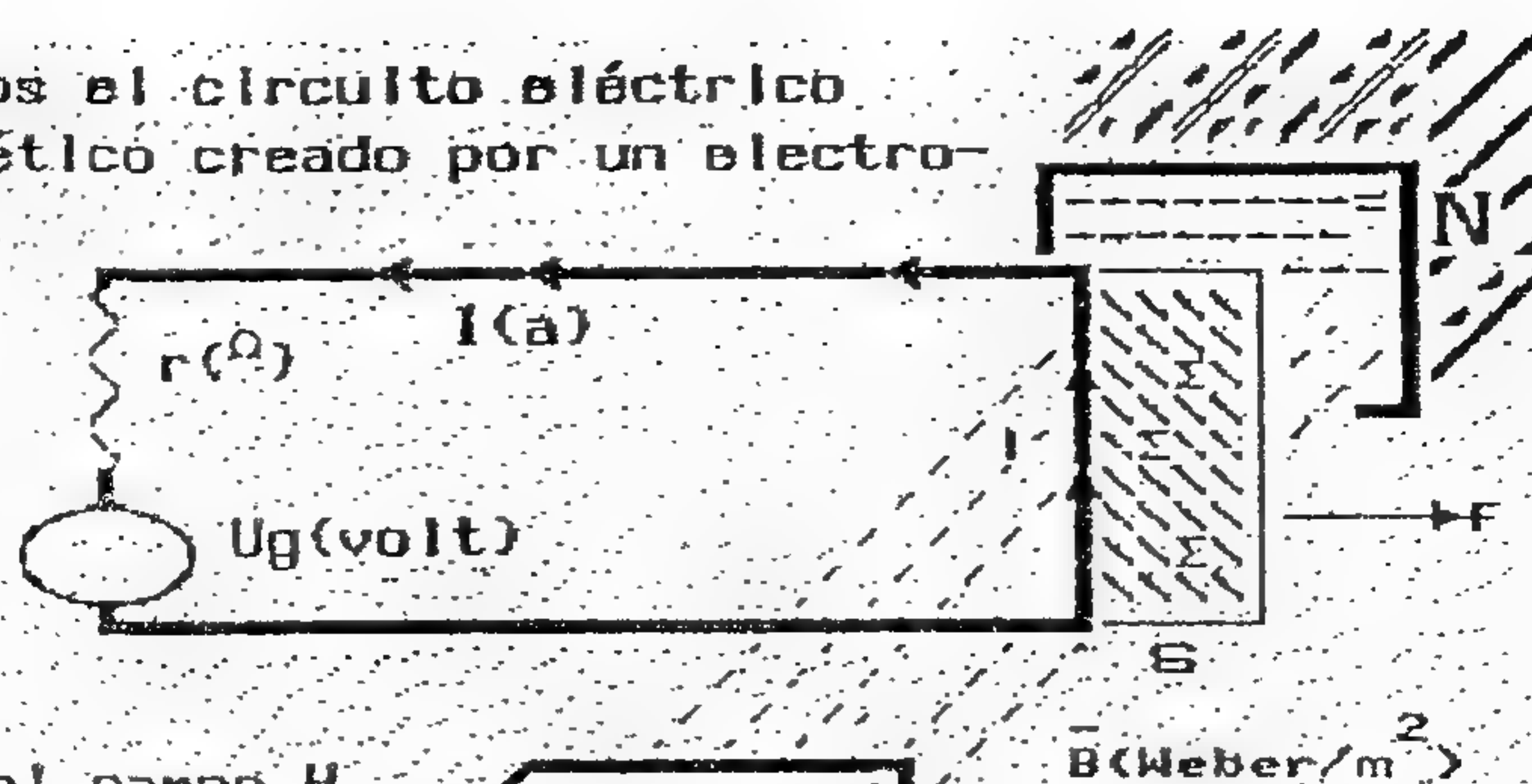
$$3). \quad U_g \cdot I = I^2 \cdot r$$

Esta última expresión es coherente con el principio de conservación, es decir:

$$4). \quad P_{entrada} = P_{salida}$$

Ahora sometemos el circuito eléctrico al flujo magnético creado por un sistema electromagnético. Podría ser un electroimán.

Ahora sometemos el circuito eléctrico al flujo magnético creado por un electro-  
imán.



Se enfrentan el campo  $H$  de la corriente del circuito eléctrico con el campo  $B$  del electroimán.



Como consecuencia del enfrentamiento entre ambos campos se ejerce una fuerza resultante que mueve un espacio el circuito y por ende barre una superficie de flujo.

Se desarrolla un elemento diferencial de trabajo  $dT$ .

$$5) \quad dT = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Dicha fuerza es proporcional a la circulación de corriente, densidad de flujo magnético y longitud del conductor que participa en el proceso.



$$6) \quad \vec{F} = \vec{B} I l$$

Podemos reemplazar la 6) en la 5).

$$7) \quad dT = \vec{B} I l \cdot d\vec{s}$$

Ahora bien, tengamos en cuenta que :

$$8) \quad \vec{B} = \frac{d\phi}{d\Sigma}$$



*Por otra parte:*

$$9) \quad d\Sigma = l \cdot d\vec{s}$$

*Al reemplazar 8 y 9 en la 7, diferencial del trabajo:*

$$10) \quad dT = \frac{d\phi}{d\Sigma} \cdot l \cdot ds \cdot I$$

*Nos queda tras las simplificaciones correspondientes:*

$$11) \quad dT = I * \partial\phi$$

*La potencia mecánica desarrollada resulta :*

$$12) \quad P = dT/dt$$

*De esta manera la potencia mecánica se expresa:*

$$13) \quad P(\text{wat}) = \frac{\partial\phi}{dt} \cdot (\text{volt}) I (\text{Amp})$$

*Se ha generado una f.e.m., producto del movimiento y del corte de líneas de flujo;*

$$14) \quad f.e.m. = \frac{\partial\phi}{dt}$$

*Dicha f.e.m. se intercala en el circuito eléctrico siempre y cuando exista un movimiento, es decir exista un sometimiento a la dependencia temporal.*

*Si aplicamos ahora nuevamente el principio de conservación:*

$$P_{\text{entrada}} = P_{\text{salida}}$$

*tendremos:*

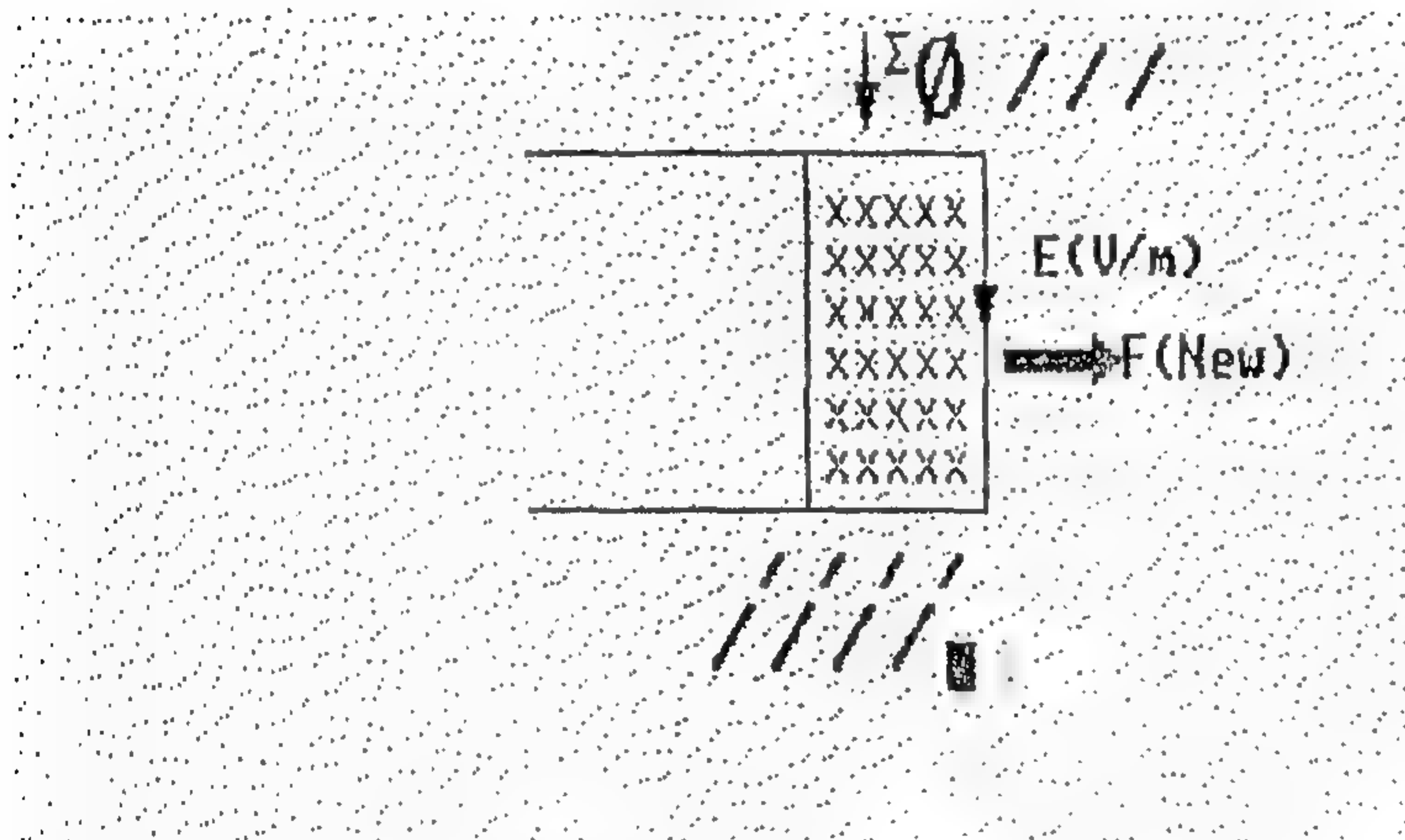
$$15) \quad U_g I = I^2 r + \frac{\partial \phi}{\partial t} I$$

de donde despejamos la expresión de la nueva corriente:

$$16) \quad I = \frac{U_g - \frac{\partial \phi}{\partial t}}{r}$$

Se aprecia así, la ley de Ohm, la ley de Faraday, pero también la ley de Lenz, que afirma que la f.e.m. de inducción electromagnética, es de oposición.

Si ahora consideramos la superficie de flujo barrido por el conductor y la trayectoria que la encierra, procederemos a efectuar la integral curvilínea del campo eléctrico



$$17) \quad \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\phi}{dt}$$

El flujo magnético se calcula mediante la integral :

$$18) \quad \phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$



Reemplazando la 18 en el segundo miembro de la 17 y además, aplicando el teorema de Stokes al primer miembro de la misma:

$$19) \quad \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = - \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Sin producir efecto alguno, el operador temporal puede ser introducido dentro de la integral.

Esta se efectúa a través de la superficie barrida de flujo por lo que es de carácter espacial.

$$20) \quad \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Por cuanto las integrales son definidas ambas para una misma superficie barrida del flujo podemos asegurar que los integrandos son iguales.

$$21) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La última expresión es la ecuación de Maxwell-Faraday en forma diferencial, mientras que en forma integral y según el teorema de Stokes es:

$$22) \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt}$$

Responde al fenómeno de inducción electromagnética y establece la relación entre ambos campos, el eléctrico y el magnético. Más aún pone de manifiesto que el Campo Electrostático es una condición de contorno del campo electromagnético, cuando no exista dependencia temporal. Cuando ello ocurre nos reencontramos con la integral curvilínea:

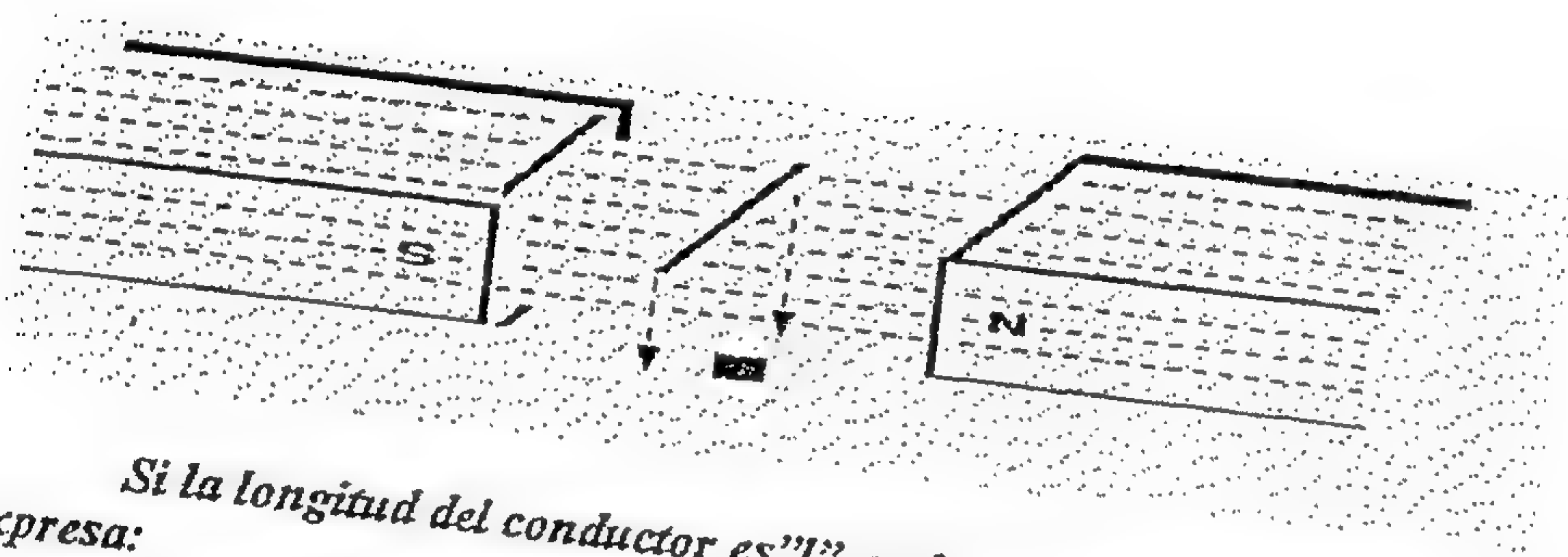
$$23) \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Es el caso particular donde el campo eléctrico  $E$  vuelve a ser conservativo.

La f.e.m. obtenida por un efecto mecánico, corte de líneas, variación de la corriente, bajo dependencia temporal, constituye una discontinuidad, identificada por el segundo miembro de la ecuación de Maxwell-Faraday.

### 0022.- APLICACION FARADAY

Se tiene un conductor recto moviéndose de modo vertical dentro del flujo magnético en el entrehierro de un electroimán.



Si la longitud del conductor es " $l$ ", y el recorrido es " $s$ ", la f.e.m. se expresa:

$$1) f.e.m. = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d[B \cdot \Sigma \phi]}{dt}$$

La superficie barrida del flujo  $\Sigma \phi$  está dada por el producto  $l \times S$ . La densidad de flujo  $B$ , es una constante función de la corriente y permeabilidad del electroimán.

$$2) f.e.m. = B \cdot l \cdot \frac{ds}{dt} = B \cdot l \cdot v$$

El resultado que arroja el análisis precedente corrobora el enunciado de Miguel Faraday, cuando asevera que la inducción es directamente proporcional al campo magnético existente, a la longitud del conductor y a la velocidad de movimiento.

### 0030.- GENERACION DE TENSION CON UN CUADRO MOVIL



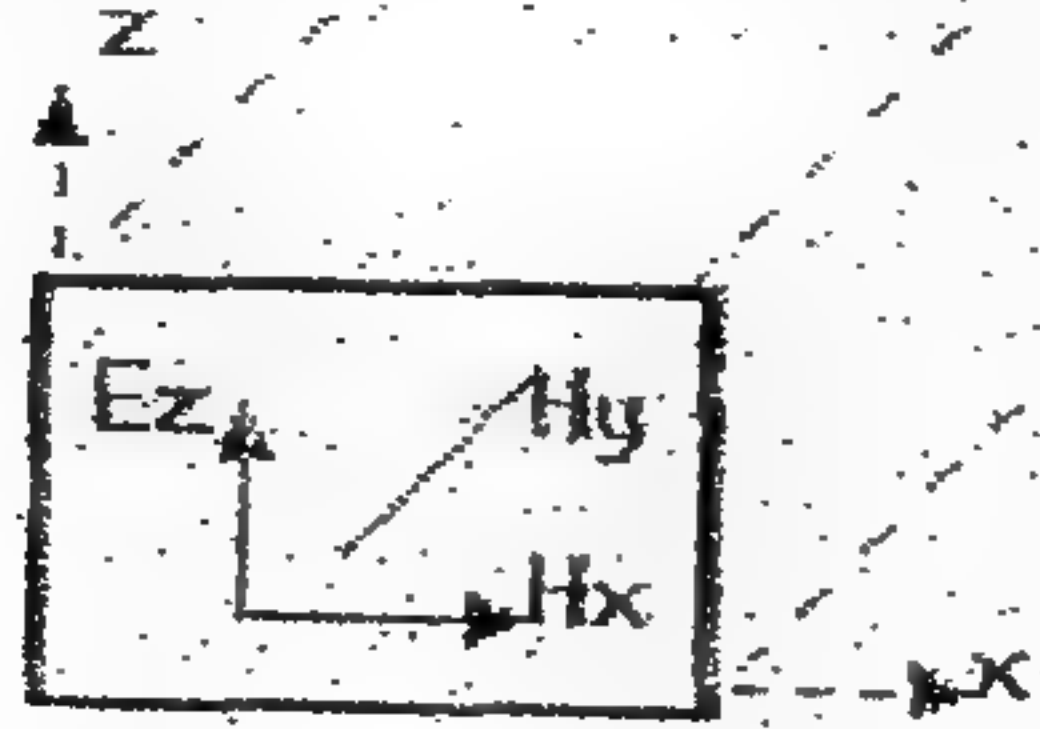
EJERCICIO RESUELTO  
GUIA DE ONDA

Datos: frecuencia 100MHz

$$\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ mho/m}$$

$$E_z = 1V/m$$

Se pide la energía absorbida por el metal de las placas



## SOLUCION:

1º.-En el espacio libre dentro del hueco de la guía la onda electromagnética encuentra la impedancia:

$$\eta_0 = \frac{E_z}{H_x} = 120 \cdot \pi = 377 \Omega$$

El campo magnético resulta:

$$H_x = \frac{E_z}{377} = 2,65 \text{ mA}$$

Una pequeña componente del campo eléctrico en la dirección de propagación debido a las corrientes inducidas por la componente  $H_x$  en las paredes metálicas encuentra una impedancia intrínseca dada por,

$$\eta_m = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu_0}{\sigma}} \angle 45^\circ = \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot 10^8 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{5,8 \times 10^7} \right)^{\frac{1}{2}} = 3,69 \times 10^{-3} \angle 45^\circ$$

Dicha componente pequeña del campo eléctrico está dada por:

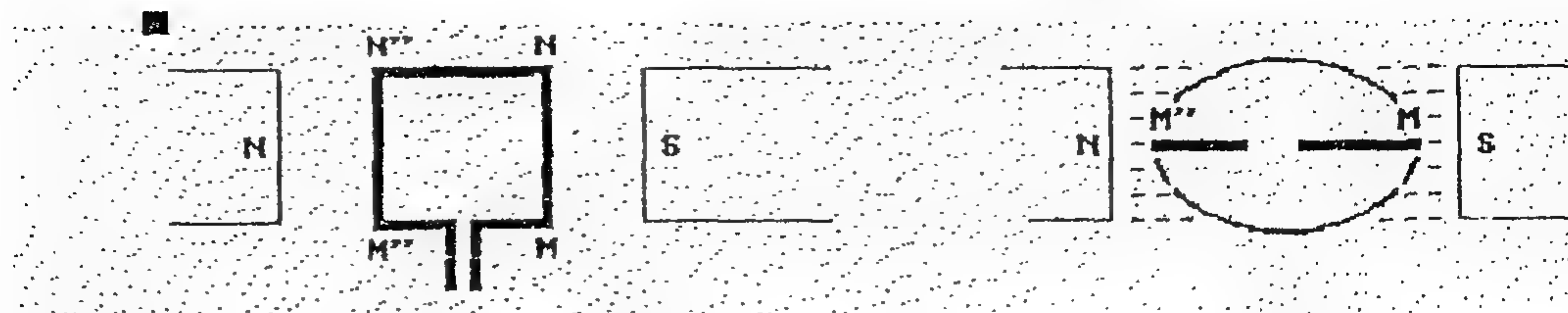
$$E_y = \eta_m \times H_x = 3,69 \times 10^{-3} \times 2,65 \times 10^{-3} \angle 45^\circ = 9,78 \times 10^{-6}$$

Con lo cual la densidad de energía absorbida se calcula mediante:

$$S = \frac{1}{2} \frac{E_y^2}{\eta_m} = 12,95 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$$

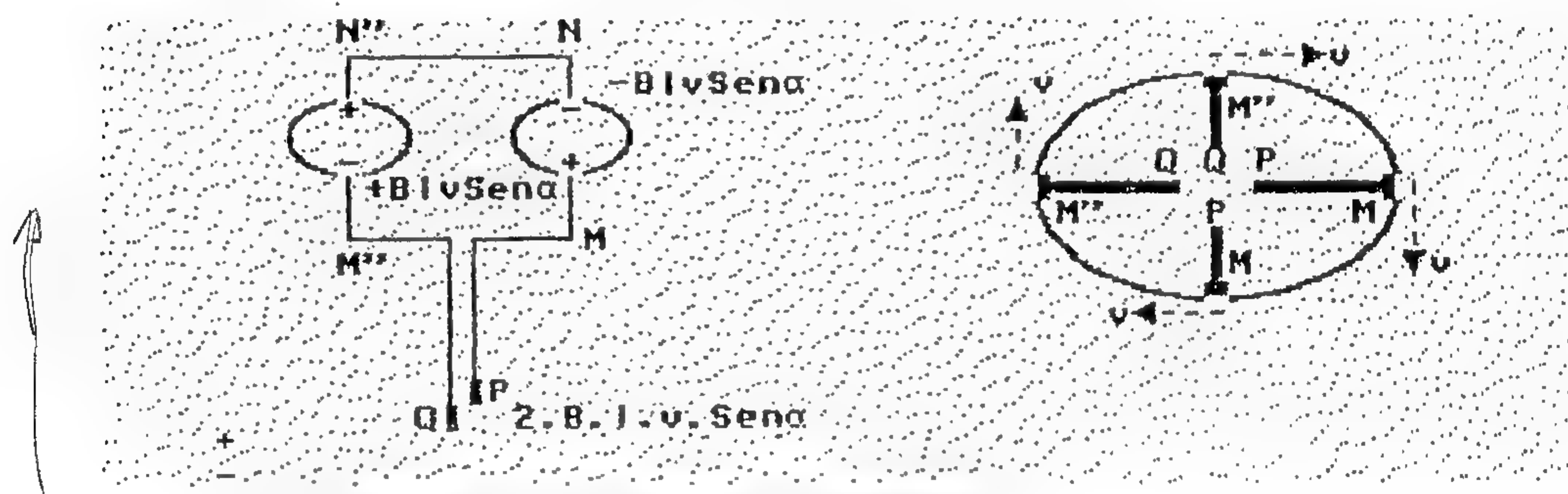
repetir

Se tiene ahora un cuadro movil giratorio dentro del campo.



Los tramos  $MN$  y  $M'N'$ , al girar cortan líneas de fuerza. Cuando un tramo baja el otro sube. El corte es oblicuo en la mayor parte del recorrido mientras que, es vertical solo en dos puntos diametralmente opuestos en los cuales la generación es máxima.

Dichos tramos que se hallan en serie, generan tensiones de igual valor pero de distinto signo. Consecuentemente se tiene:



Por lo tanto en los bornes  $PQ$  se tiene:

$$3) \quad f.e.m. = 2.B.l.v.Sen\alpha$$

La velocidad es tangencial y el movimiento es armónico circular.

$$4) \quad v = \omega.R$$

Donde  $\omega$  es la velocidad angular y  $R$  es el radio de giro. Asimismo, la velocidad angular es el ángulo barrido en la unidad de tiempo.

$$5) \quad \omega = \frac{\alpha}{t}$$



$$6) \quad \alpha = \omega.t$$

*Reemplazamos en la 3).*

$$7) \quad f.e.m. = 2.B.l.\omega.R.Sen\omega.t$$

*La superficie de flujo barrido coincide con la superficie del cuadro.*

$$8) \quad \Sigma_{\phi} = 2.l.R$$

*Reemplazamos la 8) en la 7), :*

$$9) \quad f.e.m. = B.\Sigma_{\phi}.\omega.Sen\omega t$$

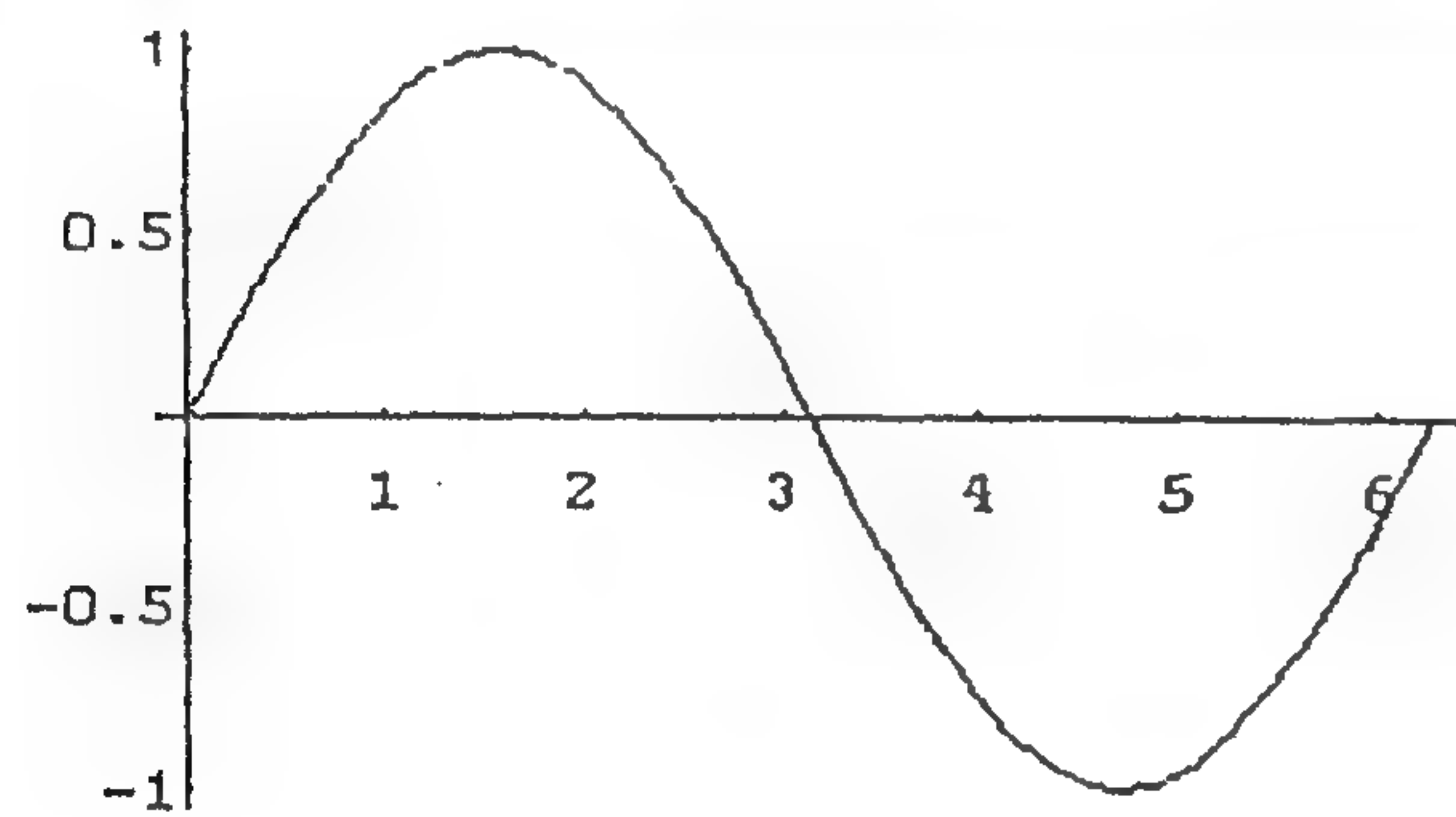
*El flujo total está dado por :*

$$10) \quad \phi = B.\Sigma_{\phi}$$

*Por lo tanto*

$$11) \quad f.e.m. = \phi.\omega.Sen\omega.t$$

*Con lo cual arribamos a la generación de una Corriente Alterna por efecto de la inducción electromagnética de Faraday.*



0031-PROPAGACION DE UNA ONDA ELECTROMAGNETICA

Las cuatro ecuaciones de Maxwell estudiadas en las Secciones anteriores, convergen en el estudio de la propagación de una onda electromagnética.

En tal sentido cabe diferenciar las tres posibilidades determinadas según el medio donde se propaga.

- a) Propagación Libre
- b) Propagación Guiada
- c) Propagación en Conductores

0032.-TEORIA ELECTROMAGNETICA DE LA PROPAGACION

El estudio que sigue nos conducirá, al conocimiento de los parámetros intervinientes en la propagación del campo y a las ecuaciones diferenciales de Kirchhoff. Estas, constituyen la expresión general que sustenta la teoría de la propagación de una onda electromagnética

0033.-EXPRESION GENERALIZADA DEL CAMPO ELECTRICO

Comenzamos recordando la ecuación de Maxwell-Faraday.

$$1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

De la 3ra ecuación de Maxwell,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , surge que:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , donde  $\vec{A}$ , es el potencial vectorial.

Reemplazamos en la 1).

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d}{dt}[\vec{\nabla} \times \vec{A}]$$

Introducimos el operador diferencial temporal dentro del operador diferencial espacial.



$$3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left[ \frac{d\vec{A}}{dt} \right]$$

*Agrupando en un solo término:*

$$4) \quad \vec{\nabla} \times \left[ \vec{E} + \frac{d\vec{A}}{dt} \right] = 0$$

*Las propiedades del campo eléctrico y el análisis vectorial demuestran que cuando el rotor de un vector es nulo, dicho vector proviene de un gradiente de potencial escalar.*

*De donde:*

$$5) \quad \vec{E} + \frac{d\vec{A}}{dt} = -\vec{\nabla} U$$

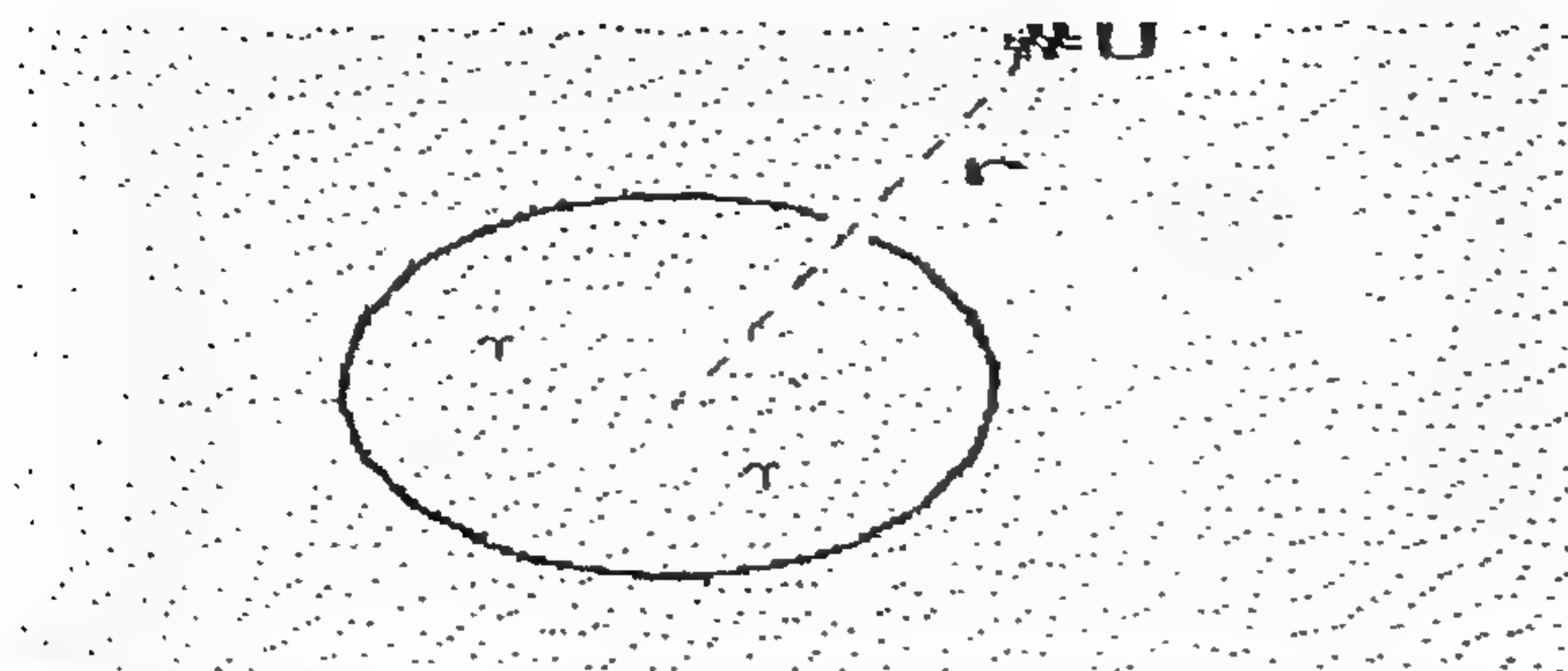
$$6) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} U - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

*Vemos así, el campo eléctrico en función de los dos potenciales, el escalar que depende de las cargas en estado de reposo y sometido a dependencia espacial a través del gradiente, y el vectorial que depende de las cargas en movimiento, sometido a dependencia temporal.*

*El potencial escalar ha sido estudiado al inicio del presente texto y puede sintetizarse mediante la siguiente expresión.*

$$7) \quad U = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho_{\tau} \cdot d\tau}{r}$$

*$\tau$  es la zona invadida por las cargas.  $r$  es la distancia a la zona invadida por las cargas.*



#### 0034.-EXPRESION DEL POTENCIAL VECTORIAL

Partimos de la expresión vectorial de Biot.

$$1) \quad B = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \iiint_{\tau} [\vec{J} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r}] \cdot d\tau$$

Una de las fórmulas del análisis vectorial establece que:

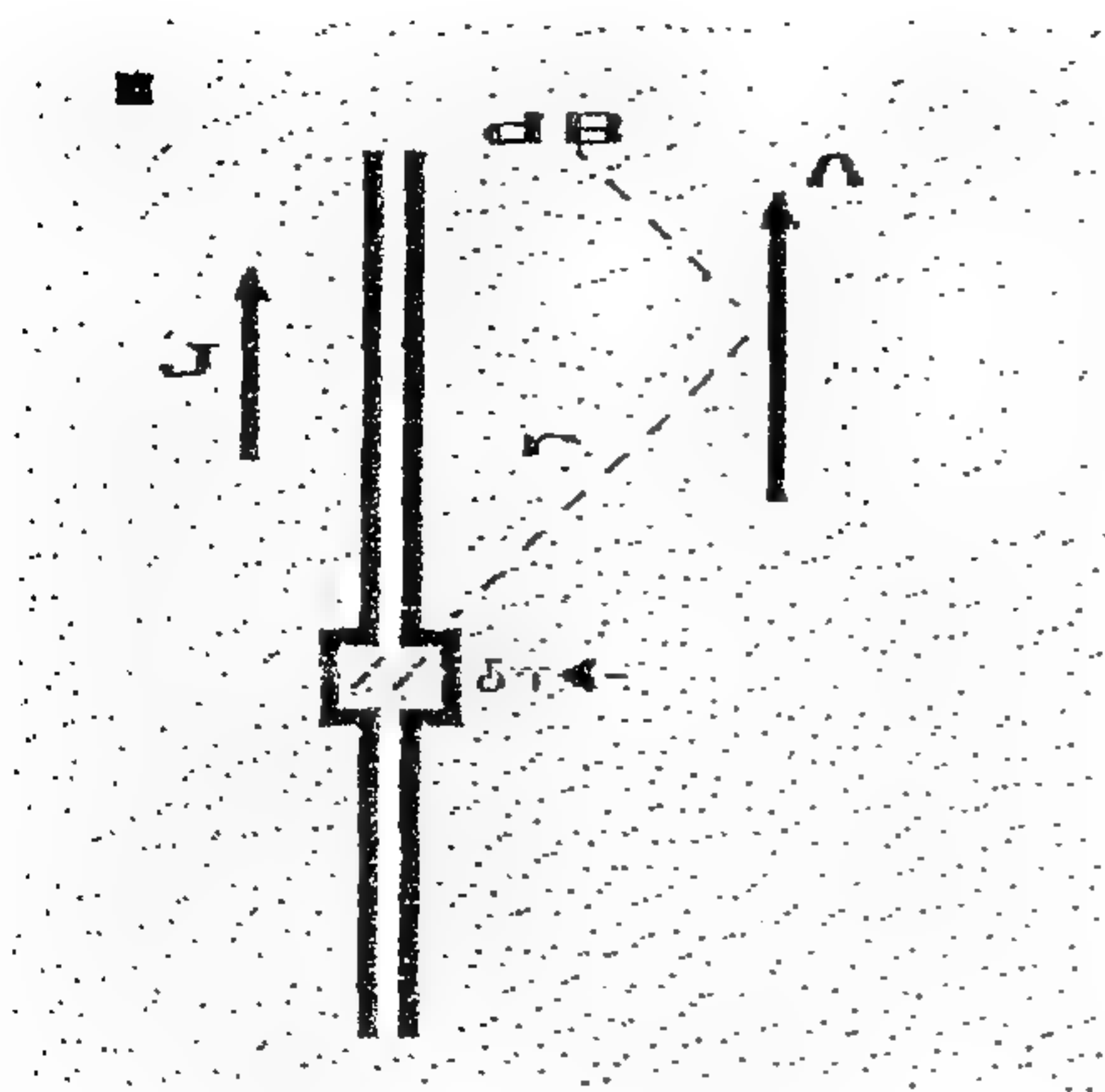
$$2) \quad \vec{\nabla} \times [a \cdot \vec{F}] = a \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

Utilizando la misma en nuestra expresión;

$$3) \quad \vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \iiint_{\tau} [-\vec{\nabla} \times (\frac{1}{r} \vec{J}) + \frac{1}{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{J}] \cdot d\tau$$

Cabe consignar que en el punto de observación no hay corrientes por lo que tampoco hay rotor. Tengamos en cuenta que si bien las integrales se efectúan respecto de la zona invadida por las cargas, las operaciones diferenciales se efectúan respecto del punto de observación. Por ello:





$$4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{J} = 0$$

Consecuentemente la última expresión se convierte en :

$$5) \quad B = -\frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \iiint_{\tau} \vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{r} \cdot \vec{J} \right] \cdot d\tau$$

Por las mismas razones expresadas precedentemente, el operador diferencial carece de utilidad dentro del integrando, motivo por el cual se lo extrae.

$$6) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J} \cdot d\tau}{r} \right)$$

Cabe tener en cuenta ahora que:

$$7) \quad \vec{B} = \text{rotor de } \vec{A}$$

Por lo tanto, de la comparación puede afirmarse que:

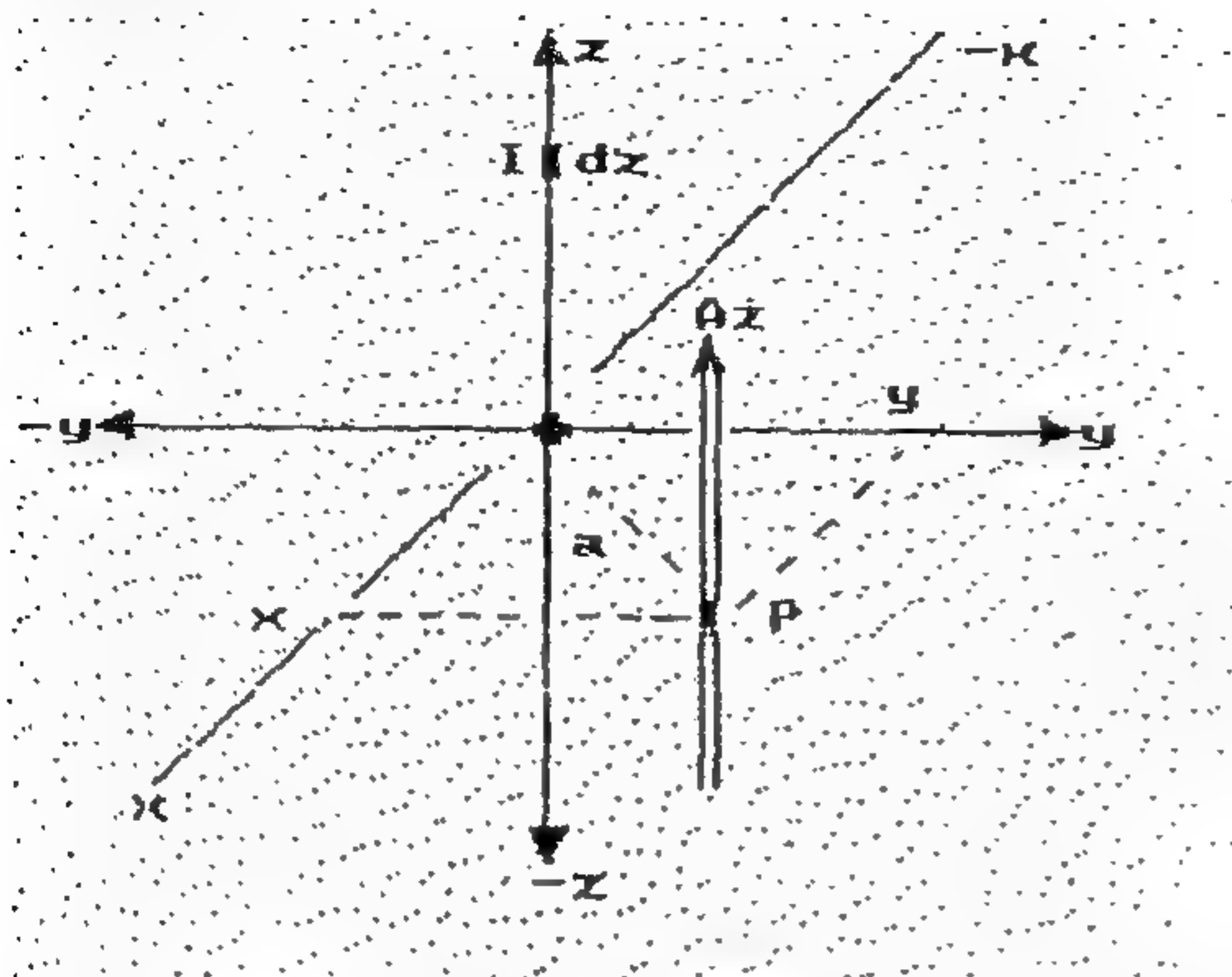
$$8) \quad \vec{A} = -\frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J} \cdot d\tau}{r}$$

Es útil comparar con la ecuación 7) de la Sección 0033, por la analogía total entre ambas, donde se aprecia que la única diferencia consiste en la quietud y/o movimiento de las partículas eléctricas.

100

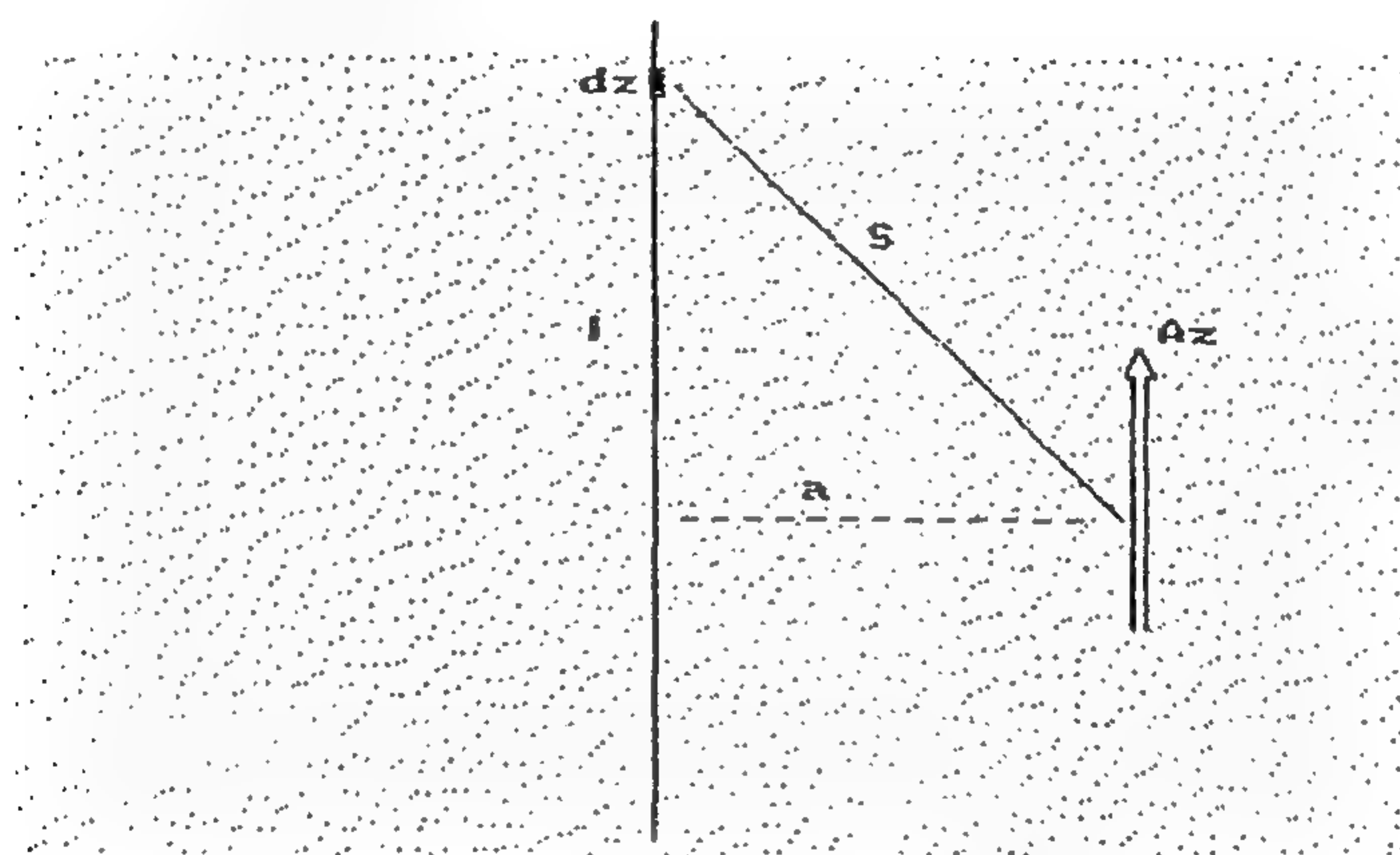
# 0035.-OBTENCION DE LA EXPRESION DEL POTENCIAL VECTORIAL PRODUCIDO POR UNA CORRIENTE LINEAL

En la sección anterior se dedujo la expresión general del potencial vectorial. Ahora nos proponemos obtener el potencial en un caso particular.



Se trata de obtener la expresión en coordenadas rectilíneas del vector potencial que se mide en el punto P distante de un conductor recto atravesado por una corriente eléctrica.

El punto P, dz y el origen de coordenadas constituyen un triángulo rectángulo.



$$1) \quad S^2 = l^2 + a^2$$



$$2) \quad A_z = -\frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \iiint_{\tau} \frac{J \cdot d\tau}{S}$$

$$3) \quad J \cdot d\tau = I \cdot dl$$

$$4) \quad S = \sqrt{l^2 + a^2}$$

Reemplazamos en la 2).

$$5) \quad A_z = -\frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I \cdot dl}{\sqrt{l^2 + a^2}}$$

A fin de evitar la discontinuidad y por ende no caer en la indeterminación, modificamos los límites de integración.

$$6) \quad A_z = -\frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot 2I \cdot \int_0^L \frac{dl}{\sqrt{l^2 + a^2}} = -\frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \ln(l + \sqrt{l^2 + a^2}) \Big|_0^L$$

$$7) \quad A_z = \frac{-\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} (\ln 2L - \ln a)$$

Observando el resultado final de la integral podemos suponer que el valor es tan grande como se quiera tanto como tan grande sea la longitud del conductor.

Sin embargo en tal caso el término " $\ln 2L$ ", puede considerarse un número constante tan grande que sea.

Hacia los objetivos que se persiguen, el potencial vector se somete a operaciones diferenciales, tanto, temporales como espaciales. Por ello dicho término constante carece de interés, ya que, su derivada es nula.

Consecuentemente, la expresión definitiva que contempla esa situación y además incluye las coordenadas del punto de aplicación del vector, nos queda:

$$8) \quad A_z = \frac{\mu \cdot \mu_0 I}{2 \cdot \pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \ln(x^2 + y^2)$$

Si se tiene en cuenta las ecuaciones de Maxwell, estudiadas en las secciones anteriores, en particular, la ecuación de Maxwell-Gauss del magnetismo:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , podremos obtener la expresión del campo magnético en coordenadas rectilíneas a partir de la expresión del potencial vector.

$$9) \quad B = \text{rotor de } A_z = \mu \cdot \mu_0 \cdot H$$

$$10) \quad H = \frac{1}{\mu \cdot \mu_0} \vec{\nabla} \times A_z$$

### 0036.-OBTENCION DE LA EXPRESION DEL CAMPO MAGNETICO A PARTIR DEL POTENCIAL VECTOR

Nuestro punto de partida es ahora la expresión del potencial vector dado por la ecuación 8 de la Sección anterior.

$$1) \quad A_z = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi} \left[ K - \ln(x^2 + y^2) \right]$$

Le aplicamos la ecuación 10 de la Sección anterior.

$$2) \quad H = \frac{I}{4 \cdot \pi} \vec{\nabla} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \frac{I}{4 \cdot \pi} \left( \vec{i} \frac{dA_z}{dy} - \vec{j} \frac{dA_z}{dx} \right)$$

Al efectuar la operación llegamos a:

$$3) \quad H = \frac{I}{2 \cdot \pi} \left[ \vec{i} \frac{-y}{x^2 + y^2} + \vec{j} \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$$

### 0037.-LAS ECUACIONES DE KIRCHHOFF

Las cuatro ecuaciones de Maxwell se hallan ligadas a cuatro fenómenos de la física y guardan evidentemente una secuencia cronológica.

La primera ecuación, está íntimamente relacionada con el descubrimiento del campo electrostático efectuado por Charles Augustin de Coulomb en 1784 y a la generalización de sus datos experimentales llevados a cabo por Carlos Federico Gauss, en 1810.

$$1) \quad \oiint_{\Sigma} E \cdot d\Sigma = Q / \epsilon \cdot \epsilon_0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_r}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

La segunda ecuación, está íntimamente ligada con el descubrimiento del electromagnetismo por parte de Ampere en 1819 y a la generalización de sus datos por parte de Maxwell en 1861.



$$2) \quad \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \qquad \vec{\nabla} \times \vec{H} = J_C + J_D$$

La tercera ecuación de Maxwell, constituye la extensión de la primera a las líneas del flujo magnético y pone de manifiesto la diferencia substancial con las líneas del flujo eléctrico.

$$3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = 0$$

Por último la cuarta ecuación, está íntimamente ligada con el descubrimiento de la inducción electromagnética por parte de Faraday en 1831, y pone de relieve la generación de una fuerza electromotriz por efecto de una variación.

$$4) \quad \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi}{dt} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

### 0038.-INCORPORACION DEL POTENCIAL VECTOR

De la ecuación 3. podemos deducir que :

$$5) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Es decir, el vector inducción magnética proviene del rotor de un vector  $A$  que representa un potencial directamente relacionado con las partículas eléctricas en movimiento o sea las corrientes.

Tiene la misma dirección que la corriente y se observa en el mismo punto exterior donde se observa el campo magnético circular y concéntrico.

$$6) \quad \vec{A} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{\tau}}{r}$$

Ahora reemplazamos la 5. en la 4.

$$7) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{dt}$$

*El operador temporal se puede introducir dentro del rotor sin afectar la operación espacial.*

$$8) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left( \frac{-d\vec{A}}{dt} \right)$$

*Las operaciones diferenciales rotor se efectúan respecto del mismo punto de observación, por lo que podemos agruparlas en un mismo miembro.*

$$9) \quad \vec{\nabla} \times \left( E + \frac{d\vec{A}}{dt} \right) = 0$$

*La ecuación última nos dice que el vector que se encuentra entre paréntesis es irrotacional.*

*Por lo tanto proviene de un gradiente de potencial escalar.*

$$10) \quad E + \frac{d\vec{A}}{dt} = -\vec{\nabla}U$$

*De ésta última, deducimos.:*

$$11) \quad E = -\vec{\nabla}U - \frac{d\vec{A}}{dt}$$

*La ecuación 11. se la denomina expresión generalizada del Campo Eléctrico.*

*Observar que el campo eléctrico se expresa en función de la variación espacial del potencial escalar y la variación temporal del potencial vectorial.*

*Para iniciar la búsqueda de las ecuaciones de Kirchhoff, procedemos previamente a calcular miembro a miembro la divergencia.*



$$12) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla} U - \frac{d\vec{A}}{dt} \right)$$

$$13) \quad \frac{\rho_{\tau}}{\epsilon \cdot \epsilon_0} = -\vec{\nabla}^2 U - \frac{d}{dt} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

En el primer miembro de la ecuación 12 incorporamos la primera ecuación de Maxwell. En el segundo término del segundo miembro introducimos la ecuación 6 de esta Sección.

$$14) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}{r} \cdot d\tau$$

$$15) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho_{\tau}}{dt}$$

Reemplazamos la ecuación 15, ecuación de continuidad, en la 14.

$$16) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu \cdot \mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{-d\rho_{\tau}}{dt} \cdot d\tau$$

Si tenemos en cuenta que el potencial escalar está dado por :

$$17) \quad U = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho_{\tau}}{r} \cdot d\tau$$

surge la Condición de Lorenz, que relaciona ambos potenciales, el escalar con el vectorial.

#### 0039.-CONDICION DE LORENTZ

$$18) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \frac{dU}{dt}$$

Si ahora reemplazamos en la 13.

$$19) \quad \frac{\rho_{\tau}}{\epsilon \cdot \epsilon_0} = -\bar{\nabla}^2 U - \frac{d}{dt} \left( -\mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{dU}{dt} \right)$$

De donde , eliminando el paréntesis y reacomodando los términos:

$$20) \quad \bar{\nabla}^2 U - \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} = -\frac{\rho_{\tau}}{\epsilon \cdot \epsilon_0}$$

Es dable destacar que la ecuación diferencial de segundo orden de Gustavo Kirchhoff, (1824-1887), mantiene su forma y es compatible para cuando las partículas eléctricas están en movimiento, en donde consecuentemente, se hace presente , el potencial vectorial y la densidad superficial de corriente.

$$21) \quad \bar{\nabla}^2 \vec{A} - \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d^2 \vec{A}}{dt^2} = -\mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{J}$$

Estas ecuaciones, 20 y 21 constituyen la base de las leyes de las corrientes derivadas correspondientes a la teoría de circuitos.

Asimismo cubren todas las posibilidades ya que como condición de contorno admite tanto a la ecuación de POISSON como a la de LAPLACE.

$$22) \quad \bar{\nabla}^2 U = -\frac{\rho_{\tau}}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \text{ (Poisson)}$$

$$23) \quad \bar{\nabla}^2 U = 0 \text{ (Laplace)}$$

En puntos donde no existen partículas eléctricas sea detenidas o en movimiento:

$$24) \quad \bar{\nabla}^2 U - \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{d^2 U}{dt^2} = 0$$

Se trata de la ecuación de las ondas ,o ecuación de D'alambert.



La propagación puede ser libre, tal el caso de dos antenas intercomunicadas por aire.

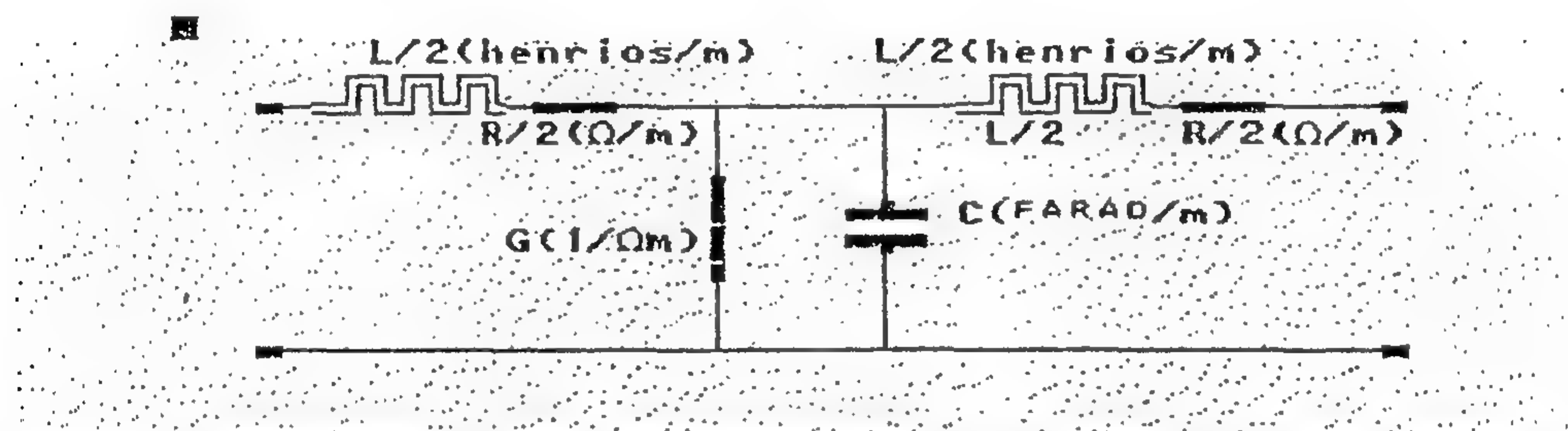
La Propagación puede ser guiada, tal el caso de un cable coaxial, puede ser la guía de onda hueca metálica ó también la guía de onda dieléctrica como ser el caso de la fibra óptica de grán utilización hoy en día en el campo de las comunicaciones eléctricas.

#### 0040.-APLICACION KIRCHHOFF

Las ecuaciones de Kirchhoff de la Teoría Electromagnética encuentran en la Teoría de Circuitos total analogía.

Para ello se recurre a un medio físico de enlace y ubicándonos en un elemento diferencial del recorrido.

#### 0041.-Análisis Circuital



Al ubicarnos en un infinitésimo de la línea,  $dy$ , el resto puede considerarse una línea infinita.

En el elemento infinitesimal, se tiene un cuadripolo diferencial.

Los componentes del cuadripolo diferencial están expresados por unidad de longitud.

Aplicamos las leyes de Ohm y Kirchhoff al elemento diferencial.

$$1. \quad \frac{dU}{dy} = (R + L \cdot \frac{d}{dt})I$$

$$2. \quad \frac{dI}{dy} = (G + C \cdot \frac{d}{dt})U$$

Derivamos respecto de la coordenada  $y$  la ecuación 1, y respecto del tiempo  $t$  la ecuación 2.

$$3. \quad \frac{d^2 U}{dy^2} = R. \frac{dI}{dy} + L. \frac{d^2 I}{dt. dy}$$

$$4. \quad \frac{d^2 I}{dy. dt} = G. \frac{dU}{dt} + C. \frac{d^2 U}{dt^2}$$

*El segundo miembro de la ecuación 4., se ubicará en el segundo término del segundo miembro de la ecuación 3.*

$$5. \quad \frac{d^2 U}{dy^2} = R. \frac{dI}{dy} + G. L. \frac{dU}{dt} + L. C. \frac{d^2 U}{dt^2}$$

*Aquí podemos reacomodar los términos de la ecuación última:*

$$6. \quad \frac{d^2 U}{dy^2} - L. C. \frac{d^2 U}{dt^2} = R. \frac{dI}{dy} + G. L. \frac{dU}{dt}$$

*Nos reencontramos con la ecuación de Kirchhoff de la teoría de los campos, donde se advierte en el miembro de la izquierda, el D'alambertiano, mientras que en el miembro de la derecha, los elementos disipativos del sistema.*

*Es dable comparar:*

$$7. \quad \nabla^2 U + \mu. \mu_0. \epsilon. \epsilon_0. \frac{d^2 U}{dt^2} = - \frac{\rho \tau}{\epsilon. \epsilon_0}$$

*Es interesante observar la equivalencia, por ejemplo si nos referimos al producto LC.*

*La inductancia y capacidad distribuida de una línea bifilar abierta está dada por:*



$$8. \quad L = \frac{\mu \cdot \mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

$$9. \quad C = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{a}\right)}$$

*Si multiplicamos las dos últimas ecuaciones entre sí, se aprecia y se corrobora la equivalencia.*

$$10. \quad L \times C = \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 = \frac{\mu \cdot \epsilon}{9 \times 10^{16}} = \frac{\mu \cdot \epsilon}{c^2}$$

#### 0042.-Ecuación de continuidad de la Energía Propagada

*Una fuente de perturbación electromagnética, oscilador abierto, irradiante o antena, lanza al medio, sea el espacio libre ó sea un medio físico de enlace, un frente de onda.*

*El vector de Poynting es el resultado del producto vectorial de los campos eléctrico y magnético.*

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

*Si procedemos a calcular la divergencia miembro a miembro:*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

*Traemos a nuestro desarrollo, las ecuaciones de Maxwell-Faraday y Maxwell-Ampere:*

$$1. \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$2. \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

*Las incorporamos en la expresión de la divergencia del vector de Poynting*

$$3. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{H} \cdot \left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right) - \vec{E} \cdot \left(\vec{J}_c + \frac{d\vec{D}}{dt}\right)$$

*Tengamos en cuenta la relación que el medio tiene tanto con el campo magnético como con el campo eléctrico.*

$$4. \quad \vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

$$5. \quad \vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

*Introducimos la 4. y 5 en la 3.*

$$6. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} \mu \cdot \mu_0 \cdot H^2 - \frac{1}{2} \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \right) - \vec{J}_c \cdot \vec{E}$$

*Se denomina densidad de energía a la expresión:*

$$7. \quad W = \frac{1}{2} \mu \cdot \mu_0 \cdot H^2 + \frac{1}{2} \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$$

*En efecto , se trata de la energía por unidad de volumen*

*Se denomina , efecto Joule , o costo del transporte a la expresión:*

$$8. \quad W_D = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

*De esta manera podemos arribar a la ecuación de continuidad de la energía.*



$$9. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{dW}{dt} = -\sigma \cdot E^2$$

*Si el medio de propagación es libre, la misma se convierte.*

$$10. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{dW}{dt} = 0$$

*Es interesante comparar la ecuación de continuidad de la densidad de corriente: con la que acabamos de estudiar:*

$$11. \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_\tau}{dt} = 0$$

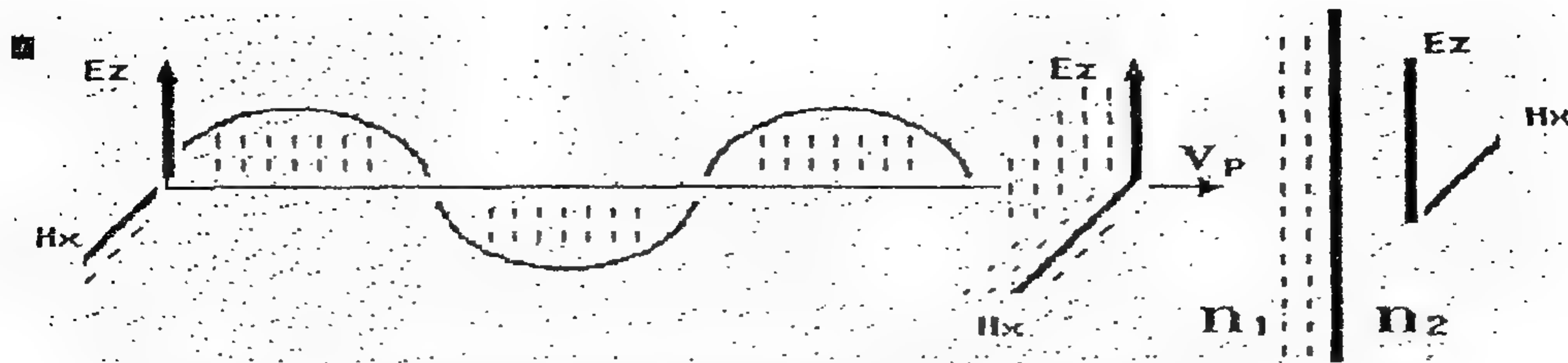
*La densidad superficial de corriente (Ec.11) se convierte en densidad volumétrica de potencia, (Ec.10) mientras que la densidad volumétrica de carga se convierte en densidad volumétrica de energía.*

*El estudio precedente es válido tanto para la propagación libre, como para la propagación guiada.*

#### **0043.-La Onda Electromagnética Propagándose De Un Medio a Otro-Teorema de Thevenin.-**

*Un frente de onda se propaga en el espacio libre:*

*Las condiciones de contorno, en la zona limítrofe se ajustan a las propiedades de los campos eléctrico y magnético.*



En lo que se refiere al campo eléctrico, se cumple :

$$1. \quad \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Con lo cual, en la zona de frontera:

$$2. \quad \vec{E}_o = -E_1$$

Mientras que con respecto al campo magnético, diremos que sus líneas de fuerza son circulares y continuas, tal como lo establece la ley de Ampere.

La impedancia intrínseca en el espacio libre está relacionada con los valores incidentes del campo.

$$3. \quad \eta_o = \frac{E_i}{H_i}$$

La onda electromagnética tras atravesar la zona fronteriza M, se encuentra con la impedancia intrínseca del segundo medio.

$$4. \quad \eta_1 = \frac{E_T}{H_T} \text{ Donde :}$$

$$5. \quad E_T = E_i + E_r$$

$$6. \quad H_T = H_i - H_r$$

Siendo  $E_r$  y  $H_r$  las respectivas señales reflejadas.

Si reemplazamos la 5. y la 6. en la 4, tenemos:



$$7. \quad \eta_1 = \frac{E_i + E_r}{H_i - H_r}$$

$$8. \quad \eta_1 = \frac{E_i}{H_i} \frac{1 + \frac{E_r}{E_i}}{1 - \frac{H_r}{H_i}}$$

Incorporando la ecuación 3 en la 8.,

$$9. \quad \frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{1 + \frac{E_r}{E_i}}{1 - \frac{H_r}{H_i}} \text{ Se denomina coeficiente de reflexión a la relación}$$

entre la onda reflejada y la onda incidente, tanto en lo que se refiere al campo eléctrico como al campo magnético.

En virtud de ello se procede a efectuar el siguiente artificio algebraico.

$$10. \quad \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_0 + \eta_1} = \frac{2 \cdot \frac{H_r}{H_i}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{E_r}{E_i}}{2} = \frac{H_r}{H_i} = \frac{E_r}{E_i}$$

De esta manera los campos de transmisión los expresamos:

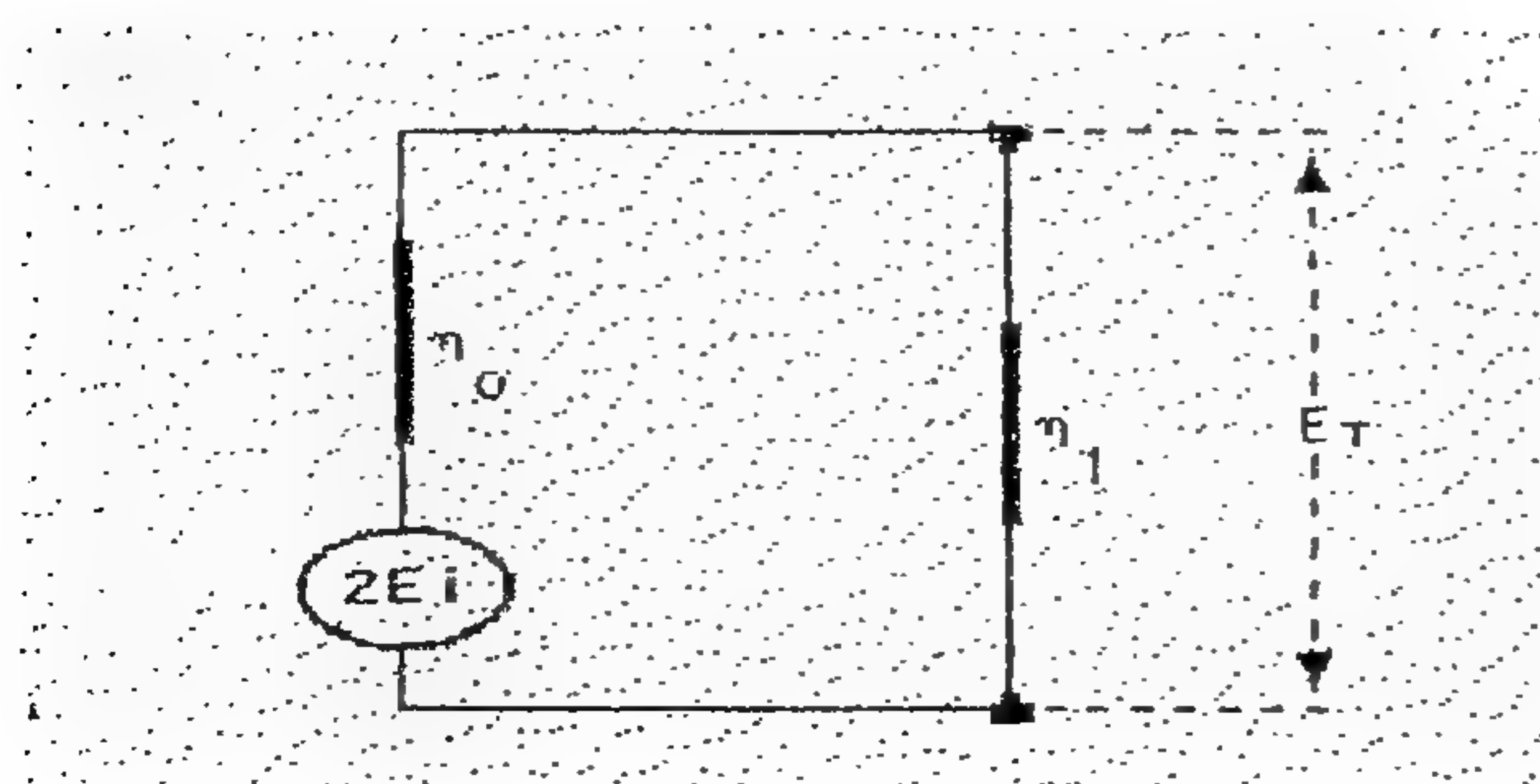
$$11. \quad E_T = E_i + E_r = E_i \left( 1 + \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} \right) = 2E_i \cdot \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_0}$$

$$12. \quad H_T = 2 \cdot H_i \cdot \frac{\eta_0}{\eta_1 + \eta_0}$$

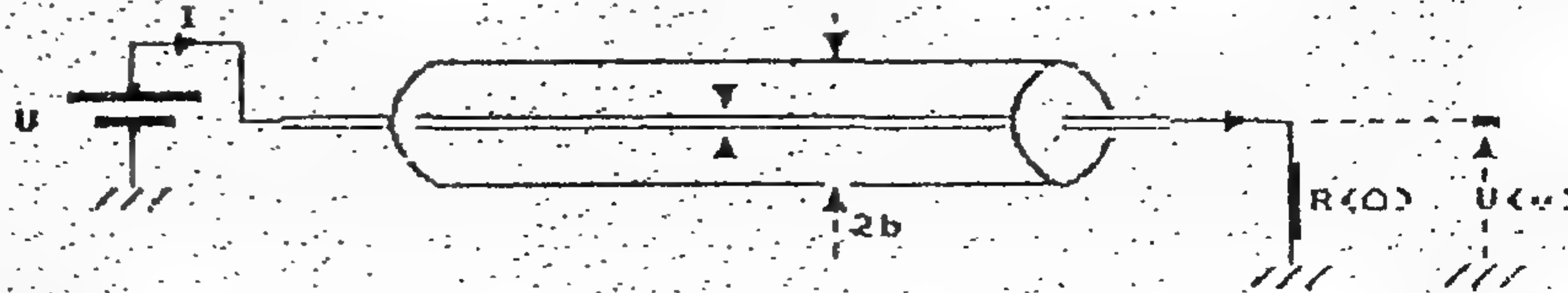
En 1883, M.L. Thevenin, publicó en la revista francesa COMPTE RENDU, un artículo denominado SOBRE UN NUEVO TEOREMA DE ELECTRICIDAD DINAMICA.

Es uno de los teoremas de más utilidad en el area de las Comunicaciones:

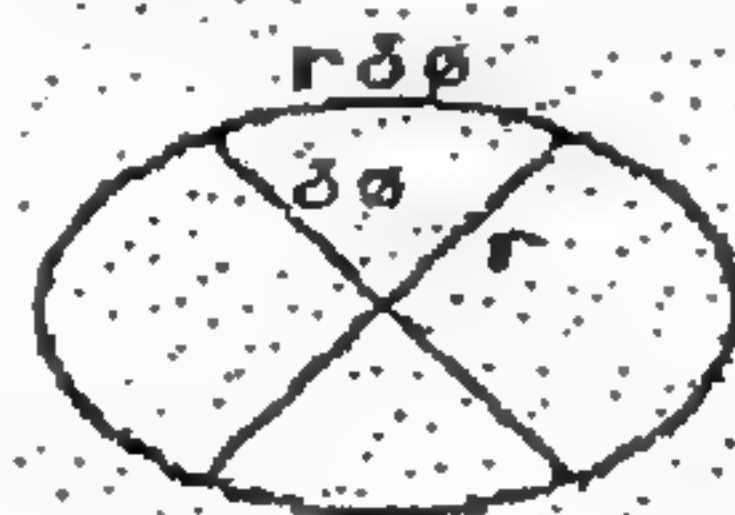
Con las últimas expresiones dadas podemos hacer una síntesis de circuito.



**0044.-Potencia Desarrollada en el Dielectrico de un Cable Coaxial Sin Pérdidas.**



Nos ubicamos en una sección transversal del cable;



Procederemos a calcular la potencia, para lo cual tendremos en cuenta las expresiones del campo magnético en el dieléctrico:

$$1. \quad H(A/m) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

El campo eléctrico, en función del potencial:

$$2. \quad E = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{b}{a}}$$

La potencia desarrollada es el flujo del vector de Poynting

$$3. \quad P = \iint_{\Sigma} E \cdot H \cdot d\Sigma$$

Donde :

$$4. \quad d\Sigma = r dr \cdot d\theta$$



Reemplazamos 1. , 2. y 4 en la 3.

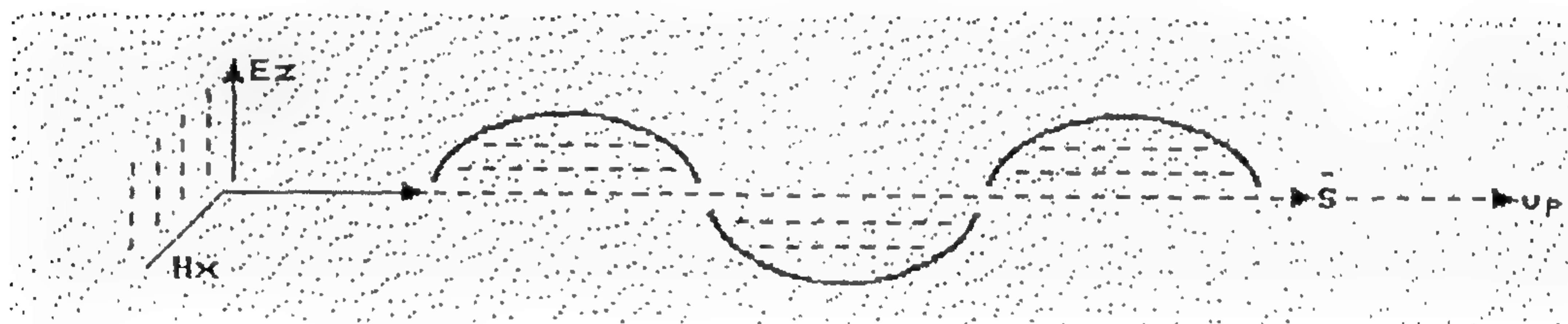
$$5. \quad P = \iint_{\Sigma} \frac{U}{r \cdot \ln \frac{b}{a}} \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot r dr \cdot d\theta$$

$$6. \quad P = \frac{U \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot \ln \frac{b}{a}} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta = U \cdot I$$

El desarrollo permite ver que mediante la teoría de los campos se llega al mismo resultado que se obtiene con la teoría circuital.

#### 0045.-Velocidad de la Propagación e Impedancia del Medio

Un frente de onda electromagnético se propaga en el espacio libre.



Aplicamos Maxwell-Faraday.

$$1. - \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt} \quad \frac{dE_z}{dy} = \mu \cdot \mu_o \cdot \frac{dH_x}{dt} \quad dE_z = \mu \cdot \mu_o \cdot dH_x \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$E_z = \mu \cdot \mu_o \cdot H_x \cdot \vec{v}_p$$

$$2.- \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad \frac{dH_x}{dy} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{dE_z}{dt} \quad dH_x = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot dE_z \cdot dy$$

$$H_x = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E_z \cdot \vec{v}_p$$

Si multiplicamos miembro a miembro las dos componentes del campo, tenemos.

$$3.- \quad E_z \cdot H_x = \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot H_x \cdot E_z \cdot \vec{v}_p^2$$

De la cual deducimos:

$$4.- \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 10^9}}}$$

$$4a. \quad v_p = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/seg}}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \approx \frac{\vec{c}}{\sqrt{\epsilon}}$$

Si dividimos miembro a miembro las dos componentes del campo, tenemos.

$$5.- \quad \eta = \frac{E_z}{H_x} = \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\epsilon \cdot \epsilon_0}} = \frac{120 \cdot \pi}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} \approx \frac{377 \Omega}{\sqrt{\epsilon}}$$

En el vacío absoluto:  $\epsilon = 1$

$$6.- \quad \eta_0 = 377 \Omega$$

La velocidad de propagación de la onda electromagnética como la impedancia que presenta el medio a dicha onda constituyen constantes naturales.

#### 0046.-PROPAGACIÓN EN LOS CONDUCTORES



El frente de onda electromagnético se propaga entre los conductores dentro del dieléctrico.

Las ecuaciones de Maxwell, permiten estudiar el comportamiento de los mismos ante la presencia de los campos.

$$1. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$2. \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Si la señal es armónica,:

$$3. \quad \frac{d}{dt} = j \cdot \omega$$

Además:

$$4. \quad \vec{H} = \vec{i} \cdot H_x + \vec{j} \cdot H_z$$

$$5. \quad \vec{E} = \vec{j} \cdot E_y + \vec{k} \cdot E_z$$

$$6. \quad \vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$7. \quad \vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Por ello

$$8. \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_c + j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$9. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Si reemplazamos las ecuaciones 4 y 5 en las 8. y 9. y desarrollamos los rotadores

$$10. \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot (\vec{i} \cdot H_x + \vec{k} \cdot H_z)$$

$$11. \quad \vec{i} \left( \frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} \right) = -\vec{i} \cdot j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_x$$

$$12. \quad \vec{k} \cdot \frac{dE_y}{dx} = -\vec{k} \cdot j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_z$$

*Aquí, se puede fijar una condición técnica que permite independizar alguna componente de cierta coordenada.*

$$13. \quad \frac{dE_z}{dy} = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_x$$

*Aplicando el mismo desarrollo y las mismas condiciones técnicas:*

$$14. \quad \frac{dH_x}{dy} = (\sigma_c + j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0) \cdot E_z$$

*Combinando las dos últimas expresiones:*

$$15. \quad \frac{d^2 E_z}{dy^2} = j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot (\sigma_c + j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0) \cdot E_z$$

*Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden. Adoptamos la solución de Euler.*

$$16. \quad E_z = E_{z(0)} \cdot e^{\delta \cdot y}$$

*Si reemplazamos en la 15., surge que:*

$$17. \quad \delta = \sqrt{j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot (\sigma_c + j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0)}$$



Es el coeficiente de propagación que tiene dos partes primordiales, la constante de atenuación y la constante de fase.

$$18. \quad \delta = \alpha + j \cdot \beta$$

Si nos circunscribimos al conductor propiamente dicho:

$$19. \quad \delta = \sqrt{j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c}{2}}$$

Por simple comparación podemos afirmar que:

$$20. \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c}{2}} = \beta$$

Esta última expresión nos lleva a analizar diversos aspectos de la propagación en los conductores.

Uno de esos aspectos, es lo relativo a la velocidad de la propagación dentro de los mismos.

Como se sabe, la velocidad, se calcula por la relación:

$$21. \quad v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

Si unimos la 20. con la 21.

$$22. \quad v_p = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c}{2}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \omega}{\mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c}}$$

Esta última expresión nos permite observar que en un conductor propiamente dicho la velocidad guarda una relación alineal con la frecuencia de la señal.

Ello es causa de distorsión en la transmisión.

Otro aspecto importante es el relativo a la profundidad de penetración. Es decir que sólo un porcentaje del campo inyectado en el conductor se introduce dentro del mismo.

La profundidad de penetración se define como el espacio o espesor tal que :

$$23. \quad \alpha \cdot y_p = 1$$

$$24. \quad y_p = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \sigma_c}}$$

*Si el conductor es perfecto la conductividad sería infinita. En ese caso la profundidad de penetración sería nula.*

*Idéntico resultado se obtendría si la frecuencia es infinita. En ese caso el conductor se comporta cual un espejo para las ondas electromagnéticas que inciden en el mismo.*

*Un tercer aspecto, es el referido a la Impedancia Intrínseca del medio.*

*En efecto:*

$$25. \quad \frac{E_z}{H_x} = \eta_i = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0}{\sigma_c + j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}}$$

*Pueden establecerse condiciones de contorno, que permiten visualizar el proceso de propagación.*

*En primer lugar si nos ubicamos en el dieléctrico.:*

$$26. \quad \sigma_c = 0$$

*Nos reencontramos con la impedancia intrínseca en el espacio:*

$$27. \quad \eta_i = 120 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

*En la mayoría de las circunstancias la permeabilidad en el espacio dieléctrico es unitaria por lo que la última expresión se convierte:*

$$28. \quad \eta_i = \frac{120 \cdot \pi}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{377 \Omega}{\sqrt{\epsilon}}$$

*Si por el contrario nos ubicamos precisamente en el conductor:*



*Queda en claro que esta fórmula es válida para valores comprendidos de frecuencias altas es decir de Radiofrecuencia.*

*Para frecuencias bajas en el rango de las audiofrecuencias es válida la expresión de la resistencia óhmica dada por la Ley de Ohm*

*Por otra parte y en concordancia con lo dicho si medimos con un instrumento intercalado en serie la intensidad de la corriente de conducción, ésta guarda directa relación con la componente longitudinal del campo eléctrico.*

*En cambio, la intensidad de la corriente de desplazamiento guarda directa relación con el campo radial que emerge del conductor y se introduce en el dieléctrico.*

$$29. \quad \varepsilon = 0$$

*Nos hallamos con una expresión compleja, de fase 45°.*

$$30. \quad \eta_i = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0}{2 \cdot \sigma_c}} + j \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0}{2 \cdot \sigma_c}}$$

*Las partes al ser iguales sirven para calcular la resistencia por unidad de longitud de un conductor.*

*Si nos referimos a un conductor cilíndrico de radio  $a$ :*

$$31. \quad r(\Omega / m) = \frac{\sqrt{\frac{\omega \cdot \mu \cdot \mu_0}{2 \cdot \sigma_c}}}{2 \cdot \pi \cdot a}$$

*Si utilizamos un conductor de cobre, cuya conductividad es de:*

$$32. \quad \sigma_c = 5,8 \times 10^7 (1 / \Omega \cdot m)$$

*Y además consideramos que:*

$$33. \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$34. \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Hy} / m$$

*Al reemplazar en la 31. nos queda:*

$$35. \quad r(\Omega / m) = 4,15 \times 10^{-8} \cdot \frac{\sqrt{f}}{a}$$

*La expresión contempla el efecto pelicular o efecto Skin, que determina que las partículas eléctricas se ubican en la periferia del conductor dentro del espesor denominado <profundidad de penetración>.*

*Consecuentemente, si se trata de un cable coaxial:*

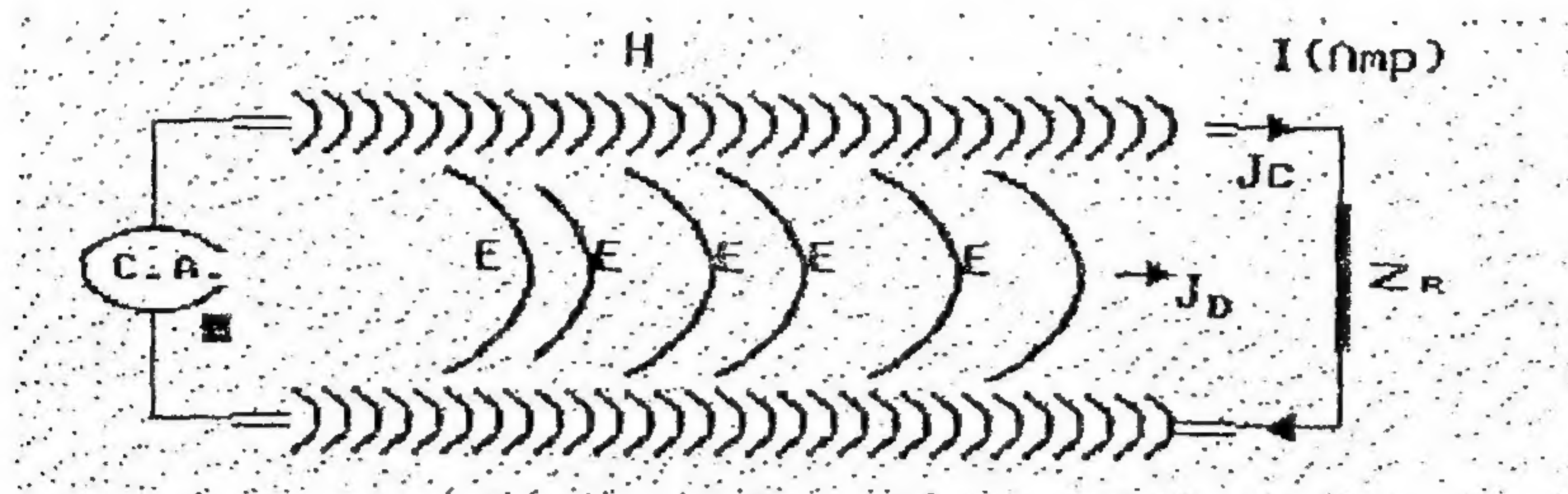
*La expresión de la resistencia por unidad de longitud está dada por:*

$$36. \quad r(\Omega / m) = 4,15 \times 10^{-8} \sqrt{f} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$



### 0047.-DENSIDAD DE CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

Nos referimos a un medio de enlace físico. Nuestro modelo matemático es una línea bifilar abierta alimentada mediante una señal variable.



Si la señal alterna aplicada es armónica la podemos expresar en función del campo eléctrico de la siguiente manera:

$$1.- \quad E_e = |E_e| \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

El campo eléctrico guarda una relación directa con la diferencia de potencial aplicada. El vector desplazamiento encuentra en el dieléctrico su ámbito de acción.

$$2.- \quad D = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot |E_e| \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

La densidad superficial de corriente de desplazamiento es la variación temporal del vector desplazamiento.

$$3.- \quad J_D = \frac{dD}{dt} = j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E_e$$

El campo eléctrico, como se viera en secciones anteriores, se expresa en función de la diferencia de potencial de una línea bifilar abierta, de la siguiente manera.

$$4.- \quad E = \frac{U}{D \cdot \ln \frac{D}{a}}$$



Por lo tanto:

$$5.- \quad J_D = j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{U}{D \cdot \ln \frac{D}{a}}$$

La densidad de corriente, por ser superficial se encuentra en virtud de una superficie equivalente.

$$6.- \quad J_D = \frac{I_D}{\Sigma_D} = \frac{I_D}{\pi \cdot D \cdot l}$$

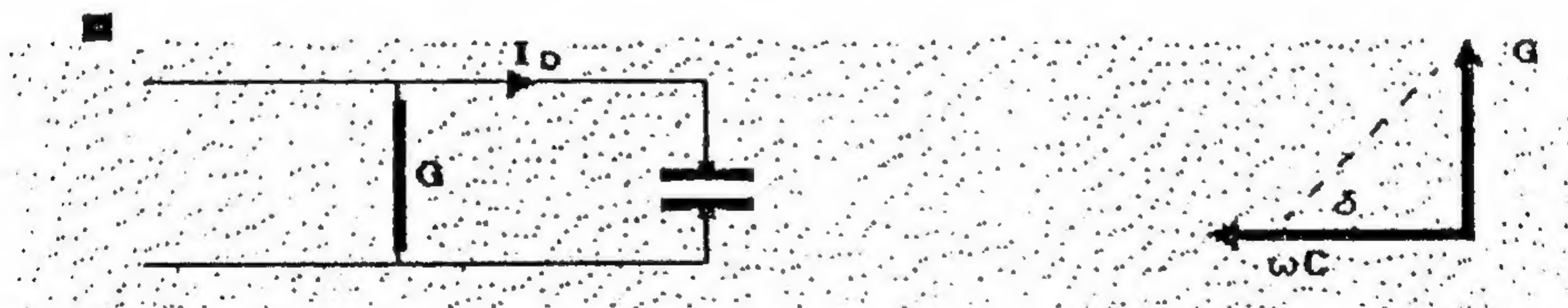
Reemplazando en la ecuación 5 y despejando la corriente de desplazamiento,;

$$7.- \quad I_D = \pi \cdot D \cdot l \cdot j \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{U}{D \cdot \ln \frac{D}{a}} = j \cdot \omega \cdot \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{D}{a}} l \cdot U = j \cdot \omega \cdot C \cdot l \cdot U$$

$$8.- \quad I_D = \frac{U}{-j \frac{1}{\omega \cdot C \cdot l}} = \frac{U}{-j \frac{1}{\omega \cdot C \cdot l}}$$

Se aprecia que la corriente de desplazamiento se desarrolla en el dieléctrico y es inversamente proporcional a la reactancia que presenta la capacidad total del medio físico de enlace.

Dicha reactancia convive con la conductancia de pérdidas "G", cuyo ámbito se halla del mismo modo en el dieléctrico.



Del diagrama se desprende: